昆明市2019届高三摸底调研测试

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	C	C	C	B	B	B	D	A	A

二、填空题

13．$0,2$（满足$a+b=2$即可）　14．4　15．$\dfrac{\pi}{2}$　16．$\left[-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

三、解答题

17．解：（1）由正弦定理得：$\sin C\cos A+\cos C\sin A=2\sin B\cos C$，

所以$\sin\left(A+C\right)=2\sin B\cos C$，即$\sin B=2\sin B\cos C$，　………………3分

因为$\sin B\neq 0$，所以$\cos C=\dfrac{1}{2}$，

又因为$C\in\left(0,\pi\right)$，故$C=\dfrac{\pi}{3}$.　……………………5分

（2）由余弦定理得，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

因为$a=5$，$c=7$，所以有$49=25+b^2-5b$，

解得$b=8$，或$b=-3$（舍去）.　…………8分

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=10\sqrt{3}$.　…………10分

18．解：（1）数学成绩的茎叶图如下：

数学成绩的茎叶图

	数学成绩
5	3
6	0 4
7	1 4 7 8 8
8	1 2 2 2 6 8 8
9	0 1 2 3
10	3 4 5 5 7
11	6

…………………………………………………………4分

（2）样本中位数为86，

众数为82.　……………………………………………………8分

（3）样本中及格人数为10人，其中成绩在区间$[90,100)$的有4人，

其余有6人，$X=0$，1，2，3，

$P\left(X=0\right)=\dfrac{C_4^0\cdot C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$，$P\left(X=1\right)=\dfrac{C_4^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2\cdot C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3\cdot C_6^0}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$，

X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$. ……………………………………12 分

19．解：（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

因为 $a_6=8a_3$，所以 $q^3=8$，故 $q=2$，………………………………………………2 分

又因为 $S_3=21$，即 $a_1+a_1q+a_1q^2=21$，解得 $a_1=3$，…………………………5 分

所以 $a_n=3\times2^{n-1}$.　　　　　　　　　　　　　…………………………………………6 分

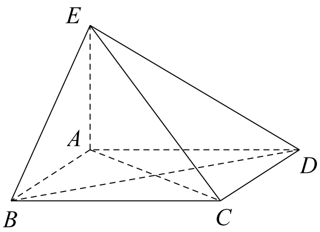
（2）设 $b_n=a_{2n}$，由（1）知 $a_{2n}=3\times2^{2n-1}$，……………………………………8 分

所以 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=4$，$b_1=6$，

故数列 $\{b_n\}$ 为首项为 6，公比为 4 的等比数列，　…………………………10 分

所以，数列 $\{a_{2n}\}$ 的前 n 项和为 $T_n=\dfrac{6\times(1-4^n)}{1-4}=2\times(4^n-1)=2^{2n+1}-2$．…………12 分

20．（1）证明：连接 AC，



因为四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=AD$，

所以矩形 $ABCD$ 是正方形，

所以 $AC\perp BD$，　　　…………………………………2 分

因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $EA\perp BD$，　　　…………………………………3 分

因为 $EA\cap AC=A$, $EA\subset$ 平面 EAC，$AC\subset$ 平面 EAC，

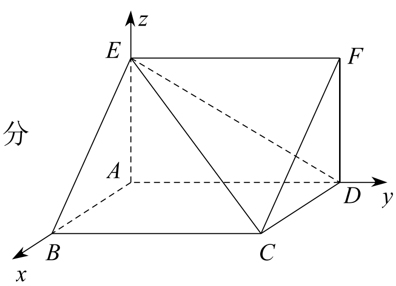
所以 $BD\perp$ 平面 EAC，　　　　　　………………………………………5 分

因为 $EC\subset$ 平面 EAC，

所以 $EC\perp BD$．　　　　　　　　　………………………………………6 分

（2）如图，鳖臑（三棱锥 $E-FCD$）中的二面角 $F-EC-D$，

即为堑堵 $ABE-DCF$ 中的二面角 $F-EC-D$，



在堑堵 $ABE-DCF$ 中，

以点 A 为坐标原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴，

AE 为 z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$．…………7 分

则 $A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，

$D(0,2,0), E(0,0,1), F(0,2,1)$.

于是 $\overrightarrow{EC}=(2,2,-1)$，$\overrightarrow{EF}=(0,2,0)$，

求得平面 ECF 的一个法向量是 $\vec{m}=(1,0,2)$，………………………………………9 分

于是 $\overrightarrow{EC}=(2,2,-1)$，$\overrightarrow{ED}=(0,2,-1)$，

求得平面 ECD 的一个法向量是 $\vec{n}=(0,1,2)$，　…………………………………11 分

所以 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$.

所以，鳖臑（三棱锥 $E-FCD$ ）中二面角 $F-EC-D$ 的余弦值是 $\dfrac{4}{5}$.　　………12 分

21．解：（1）因为 $F(1,0)$ 为椭圆 C 的一个焦点，则 $a^2-\dfrac{a^2}{2}=1$，得 $a=\sqrt{2}$，…………2 分

椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.　　……………4 分

（2）因为椭圆 C 的右焦点 $F(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0)$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，

当直线 l 为 x 轴时，A，O，B 三点共线，四边形 $OAPB$ 不存在，

故可设直线 l 的方程为 $x=my+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，　　……………6 分

由 $\begin{cases}x=my+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\\ x^2+2y^2=a^2,\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+\sqrt{2}amy-\dfrac{a^2}{2}=0$，显然 $\Delta>0$，

则 $y_1+y_2=-\dfrac{\sqrt{2}am}{m^2+2}$，　　……………8 分

若四边形 $OAPB$ 为平行四边形，则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，

即 $y_0=y_1+y_2=-\dfrac{\sqrt{2}am}{m^2+2}$，$x_0=x_1+x_2=m(y_1+y_2)+\sqrt{2}a=\dfrac{2\sqrt{2}a}{m^2+2}$.　　…………10 分

因为 P 在 C 上，所以 $x_0^2+2y_0^2=a^2$，

即 $\dfrac{8a^2}{(m^2+2)^2}+\dfrac{4a^2m^2}{(m^2+2)^2}=a^2$，化简，得 $m^4=4$，$m=\pm\sqrt{2}$，

综上，四边形 $OAPB$ 能为平行四边形，此时 $k_{OP}=\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{m}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

直线 OP 的方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，即 $x\pm\sqrt{2}y=0$.　　………12 分

22．解：（1）由题意，得 $f(x)=\ln x-x-\dfrac{2}{x}$，定义域为 $x\in(0,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{-x^2+x+2}{x^2}=\dfrac{-(x+1)(x-2)}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增；

当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

综上，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,2)$，单调递减区间 $(2,+\infty)$.　　……………………4 分

（2）由题意，得，$g'(x)=\dfrac{2a-1}{x}-a+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{(e^{x-1}-a)x^2-(e^{x-1}-ax+a)\cdot 2x}{x^4}$

$$=\frac{(x-2)(e^{x-1}-ax^2-x+a)}{x^3}，\quad x\in(0,+\infty).$$

由于 $x=2$ 是 $g(x)$ 的唯一极值点，则有以下两种情形：

情形一，$e^{x-1}-ax^2-x+a\ge 0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立；

情形二，$e^{x-1}-ax^2-x+a\le 0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.……………………………6 分

设 $h(x)=e^{x-1}-ax^2-x+a$，$x\in(0,+\infty)$，且有 $h(1)=0$，$h'(x)=e^{x-1}-2ax-1$.

①当 $a=0$ 时，$h'(x)=e^{x-1}-1$，则 $h'(1)=0$.

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\ge h(1)=0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，符合题意.…………………………8 分

②当 $a<0$ 时，$-2a>0$，则 $h'(x)=e^{x-1}-2ax-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $h'(0)=\dfrac{1}{e}-1<0$，$h'(1)=-2a>0$，所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $h'(x_0)=0$.

当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x_0)<h(1)=0<h(2)$，这与题意不符.　　…………………………………………10 分

③当 $a>0$ 时，设 $p(x)=e^{x-1}-2ax-1$，$x\in\mathbf{R}$，则 $p'(x)=e^{x-1}-2a$；

令 $p'(x)=0$，得 $x=1+\ln(2a)$.

所以当 $x<1+\ln(2a)$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 在 $(-\infty,1+\ln(2a))$ 上单调递减；

当 $x>1+\ln(2a)$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 在 $(1+\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增.

ⅰ）当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$1+\ln(2a)>1$，由于 $h'(x)$ 在 $(0,1+\ln(2a))$ 上单调递减，

则当 $0<x<1+\ln(2a)$ 时，$h'(x)<h'(0)<0$，$h(x)$ 在 $(0,1+\ln(2a))$ 上单调递减；

所以 $h(\dfrac{1}{2})>h(1)=0>h(1+\ln(2a))$，这与题意不符.

ⅱ）当 $0<a\le\dfrac{1}{2}$ 时，$1+\ln(2a)\le 1$，

由 $h'(x)=p(x)$ 的单调性及 $h'(0)<0$，$h'(1)<0$ 知，$x\in(0,1]$ 时，都有 $h'(x)<0$.

又 $h'(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递增，$h'(3)=e^2-6a-1\ge e^2-6\times\dfrac{1}{2}-1>0$，

则存在 $x_0'\in(1,3)$，使得 $h'(x_0')=0$，

所以当 $0<x<x_0'$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,x_0')$ 上单调递减；

所以 $h(\dfrac{1}{2})>h(1)=0>h(x_0')$，这与题意不符.

综上，得 $a=0$.　　　　　………………………………………………12 分