云南师大附中2019届高考适应性月考卷（二）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	A	C	A	A	C	D	A	B	C	B

【解析】

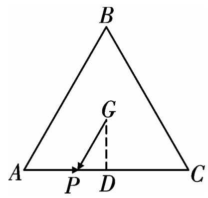

图1

1．$\dfrac{(a+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{(a+2)+(2-a)\mathrm{i}}{2}$，故选B．

2．$A=(-3，+\infty)$，$B=(2，+\infty)$，故选D．

3．$y=x\sin x$为偶函数，当$0<x<\pi$时，$\sin x>0$，故选A．

4．如图1，过点G作$GD\perp AC$，垂足为D，当点P位于线段AD上时，$\overrightarrow{GP}\bullet\overrightarrow{AP}<0$；当点$P$位于线段$DC$上时，$\overrightarrow{GP}\bullet\overrightarrow{AP}>0$，故当$\overrightarrow{GP}\bullet\overrightarrow{AP}$取得最小值时，点$P$在线段$AD$上，$\overrightarrow{GP}\bullet\overrightarrow{AP}=-|\overrightarrow{AP}|\bullet|\overrightarrow{DP}|=-|\overrightarrow{AP}|\bullet(\sqrt{3}-|\overrightarrow{AP}|)$，当$|\overrightarrow{AP}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时，取得最小值$-\dfrac{3}{4}$，故选C．

5．一方面，由$|OF_2|=2|OH|$，得$|OH|=\dfrac{1}{2}|OF_2|=\dfrac{1}{2}c$，故$|F_2H|=\sqrt{|OF_2|^2-|OH|^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$；另一方面，双曲线的渐近线方程为$bx\pm ay=0$，故$|F_2H|=\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，于是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=b$，即$\dfrac{3}{4}c^2=b^2=c^2-a^2$，故$a^2=\dfrac{1}{4}c^2$，得$e=\dfrac{c}{a}=2$，故选A．

6．根据正弦定理，由$c^2\sin A=4\sin C$，得$ac=4$，则由$B=\dfrac{\pi}{3}$，得$a^2+c^2-b^2=4$，则$S_{\triangle ABC}=\sqrt{\dfrac{1}{4}(16-4)}=\sqrt{3}$，故选A．

7．该框图是计数90到120（含90和120）之间的个数，可知$k=5$，故选C．

8．设在这周能进行决赛为事件A，恰好在周三、周四、周五进行决赛分别为事件A_3，A_4，A_5，则$A=A_3\cup A_4\cup A_5$，又事件A_3，A_4，A_5两两互斥，则有$P(A)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)=\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{8}$，故选D．

9．如图 2，将三棱柱补为长方体 $ABDC-A_1B_1D_1C_1$，异面直线 AC_1 与 A_1B 的所成角即为 $\angle AC_1D$，设 $AA_1=1$，则由题意知 $\cos\angle AC_1D=\dfrac{5+5-8}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{1}{5}$，故选 A．

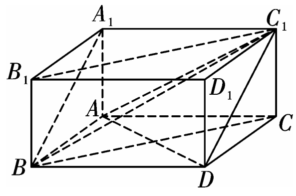

图 2

10． $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，由五点作图法可得其图象如图 3，

$\omega x+\dfrac{\pi}{6}$	0	…	2π	3π
x	$-\dfrac{\pi}{6\omega}$	…	$\dfrac{11\pi}{6\omega}$	$\dfrac{17\pi}{6\omega}$
$2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$	0	…	0	0

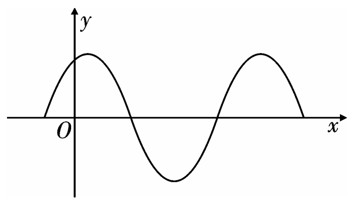

图 3

由题意得 $\dfrac{11\pi}{6\omega}\leqslant\pi<\dfrac{17\pi}{6\omega}$，即 $\dfrac{11}{6}\leqslant\omega<\dfrac{17}{6}$，故选 B．

11．令 $a=b=0$，则 $f(0)=f(0)f(0)$，又因为 $f(0)\neq 0$，所以 $f(0)=1$，故①正确；当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，当 $x=0$ 时，$f(0)=1$，即当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1>0$；当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)>0$，由题意得 $f(x-x)=f(x)f(-x)$，则 $f(x)=\dfrac{f(0)}{f(-x)}=\dfrac{1}{f(-x)}>0$，故②成立；对任意的 $x_1,\ x_2\in\mathbf{R}$，不妨设 $x_1>x_2$，故存在正数 z 使得 $x_1=x_2+z$，则 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_2+z)-f(x_2)=f(x_2)f(z)-f(x_2)=f(x_2)(f(z)-1)$，因为当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，所以 $f(z)-1>0$，因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)>0$，所以 $f(x_2)>0$，故 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，故③错误，故选 C．

12．如图 4，设内切圆的圆心为 H，连接 $AH,\ BH,\ F_2H$，设内切圆的半径为 r，则 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a=8$，$S_{\triangle ABF_2}=S_{\triangle ABH}+S_{\triangle AHF_2}+S_{\triangle BHF_2}=\dfrac{1}{2}(|AB|+|AF_2|+|BF_2|)\times r=4r$，即 $r=\dfrac{S_{\triangle ABF_2}}{4}$，当 $\triangle ABF_2$ 的面积最大时，内切圆的半径 r 最大，由题意知，

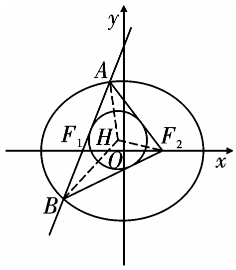

图 4

直线不会与 x 轴重合，可设直线 AB：$my=x+1$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，由 $\begin{cases} my=x+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得

$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，$\Delta=12^2(m^2+1)$，$S_{\triangle ABF_2}=S_{\triangle AF_1F_2}+S_{\triangle BF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_1|+\dfrac{1}{2}\cdot$

$|F_1F_2|\cdot|y_2|=\dfrac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot(|y_1|+|y_2|)=\dfrac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{\sqrt{\Delta}}{3m^2+4}=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$

$=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3(m^2+1)+1}=\dfrac{12}{3\sqrt{m^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}}$，令 $\sqrt{m^2+1}=t\geqslant1$，则 $3\sqrt{m^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}=3t+\dfrac{1}{t}=$

$f(t)$，当 $t\geqslant1$ 时，函数 $f(t)$ 单调递增，所以 $f(t)\geqslant f(1)=4$，当 $f(t)$ 取得最小值 4 时，

$S_{\triangle ABF_2}$ 取得最大值 3，此时 $r=\dfrac{3}{4}$，所以内切圆的面积的最大值为 $\dfrac{9\pi}{16}$，故选 B.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$y=\dfrac{1}{2}x$	$\left[-6,\ \dfrac{2}{3}\right]$	$2(1-\sqrt{2})$	16π

【解析】

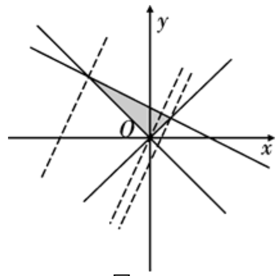

图 5

13．$y'=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$，则 $y'|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，故 $y=\dfrac{1}{2}x$.

14．可行域如图 5，根据图形可得 $-6\leqslant z\leqslant\dfrac{2}{3}$.

15．由题意得 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$，两边同时平方得 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha\cos\alpha)^2$，

即 $\sin^2 2\alpha-4\sin2\alpha-4=0$，解得 $\sin2\alpha=2(1-\sqrt{2})$ 或 $\sin2\alpha=2(1+\sqrt{2})>1$ 舍去.

16．如图 6，在正三棱锥 $P-ABC$ 中，D 为 BC 的中点，E 为 $\triangle ABC$ 的中心，

$PA=PB=PC$，由余弦定理可得 $AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cos\angle APB$，

解得 $PA=2\sqrt{2}$，即 $PA=PB=PC=2\sqrt{2}$，在 $\triangle ABC$ 中，$AD=3$，则

$AE=2$，在 $\triangle PAE$ 中，$PE=\sqrt{AP^2-AE^2}=2$，则 $AE=BE=CE=$

$PE=2$，故 E 为球心，球的半径 $r=2$，所以球的表面积为 $4\pi r^2=16\pi$.

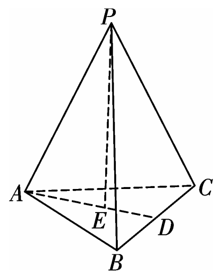

图 6

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

（1）解：由题知当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)-\left[\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)\right]=3n-1$，

所以 $a_n=3n-1$． ……………………………………………………………（3 分）

设 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $b_1=2$，$b_1q+b_1q^2=\frac{3}{2}$，解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-\frac{3}{2}$（舍去），

所以 $b_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$． ……………………………………………………（6 分）

（2）证明：由（1）得 $c_n=\frac{3n-1}{2^{n-2}}$，则 $T_n=\frac{2}{2^{-1}}+\frac{5}{2^0}+\frac{8}{2^1}+\cdots+\frac{3n-1}{2^{n-2}}$，

两边同乘 $\frac{1}{2}$，得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^0}+\frac{5}{2^1}+\frac{8}{2^2}+\cdots+\frac{3n-1}{2^{n-1}}$， ……………………………（8 分）

上面两式相减，得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^{-1}}+\frac{3}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\cdots+\frac{3}{2^{n-2}}-\frac{3n-1}{2^{n-1}}=10-\frac{6}{2^{n-1}}-\frac{3n-1}{2^{n-1}}$，

所以 $T_n=20-\frac{3n+5}{2^{n-2}}$． ………………………………………………………………（10 分）

因为 $\frac{3n+5}{2^{n-2}}>0$，所以 $T_n<20$． ……………………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）由表一得 $\overline{x}=\frac{3+4+5+6}{4}=4.5$，$\overline{y}=\frac{2.5+3+4+4.5}{4}=3.5$，

$\sum_{i=1}^{4}x_i^2=3^2+4^2+5^2+6^2=86$， ………………………………………………………（2 分）

$\therefore \hat{b}=\frac{3\times 2.5+4\times 3+5\times 4+6\times 4.5-4\times 4.5\times 3.5}{86-4\times 4.5^2}=\frac{66.5-63}{5}=0.7$， ……………………（4 分）

$\hat{a}=3.5-0.7\times 4.5=0.35$，

所以所求线性回归方程为 $\hat{y}=0.7x+0.35$． ……………………………………………（6 分）

（2）当 $x=7$ 时，$\hat{y}=0.7\times 7+0.35=5.25$，

从而能够节省 $6.5-5.25=1.25$ 吨原材料． ………………………………………………（8 分）

（3）由表二得 $K^2=\dfrac{200\times(90\times15-85\times10)^2}{100\times100\times175\times25}=\dfrac{8}{7}<2.706$， ……………………（10 分）

因此，没有 90% 的把握认为“改革前后生产的产品的合格率有差异”.

……………………………………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：$AC=BC=PC=2$，$AB=PA=PB=2\sqrt{2}$，

则 $AC^2+PC^2=AP^2$，$BC^2+PC^2=BP^2$，

所以 $PC\perp AC$，$PC\perp BC$， ……………………………………（2 分）

又因为 $AC\cap BC=C$，$AC\subset$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $PC\perp$ 平面 ABC. ……………………………………（4 分）

（2）解：$AC^2+BC^2=BA^2$，则 $AC\perp BC$，即 AC，BC，PC 两两垂直，如图 7，建立空间直角坐标系，则 $A(2,0,0)$，$P(0,0,2)$，$B(0,2,0)$，

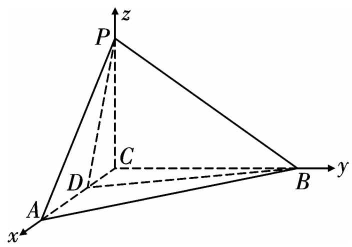

图 7

设 $D(a,0,0)$，$a\in(0,2)$，则 $\overrightarrow{PA}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(a,0,-2)$， ………………………（6 分）

平面 PBC 的法向量 $\vec{u}_1=(1,0,0)$，

设平面 PBD 的法向量 $\vec{u}_2=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}2y-2z=0,\\ ax-2z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，可得 $\vec{u}_2=\left(\dfrac{2}{a},1,1\right)$.

$\cos30^\circ=\dfrac{\vec{u}_1\bullet\vec{u}_2}{|\vec{u}_1|\bullet|\vec{u}_2|}$，解得 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， ……………………………………（8 分）

则 $\overrightarrow{PD}=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},0,-2\right)$，平面 PAB 的法向量 $\vec{u}_3=(1,1,1)$， ……………………（10 分）

设 PD 与平面 PAB 的所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PD}\bullet\vec{u}_3|}{|\overrightarrow{PD}|\bullet|\vec{u}_3|}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$，

所以所求角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{14}}{7}-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$. ……………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

（1）证明：设点 $M(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $P\left(x_0,\dfrac{x_0^2}{4}\right)$，$x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，

由 $x^2=4y$，得 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，

故 $y'=\frac{1}{2}x$，即抛物线 C 在点 P 处的切线的斜率为 $k_P=y'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{2}x_0$．

…………………………………………………………………………（2 分）

又直线 l 的斜率 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}=\frac{2x_0}{4}=\frac{x_0}{2}$，即 $k_{AB}=k_P$，

所以直线 l 平行于抛物线 C 在点 P 处的切线． ………………………………（4 分）

（2）解：由 $|PM|=a>0$，得 $M\left(x_0,\ \frac{x_0^2}{4}+a\right)$，

于是直线 l：$y-\left(\frac{x_0^2}{4}+a\right)=\frac{x_0}{2}(x-x_0)$，即 l：$y=\frac{x_0}{2}(x-x_0)+\left(\frac{x_0^2}{4}+a\right)=\frac{x_0}{2}x-\frac{x_0^2}{4}+a$．

…………………………………………………………………………（6 分）

联立直线 l 与抛物线 C 得 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=\frac{x_0}{2}x-\frac{x_0^2}{4}+a,\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2x_0x+x_0^2-4a=0$，

$\therefore x_1+x_2=2x_0,\ x_1x_2=x_0^2-4a,\ \Delta=4x_0^2-4(x_0^2-4a)=16a>0$，

…………………………………………………………………………（8 分）

$\therefore S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|PM||x_1-x_2|=\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{1}{2}a\sqrt{(2x_0)^2-4(x_0^2-4a)}=2a\sqrt{a}$，

故 $\triangle PAB$ 的面积为定值 $2a\sqrt{a}$． ……………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）证明：$g(x)$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$，$g'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$，

令 $G(x)=g'(x)$，则 $G'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x^2}>0$，

所以 $G(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，即 $g'(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增， ………（2 分）

$g'\left(\frac{1}{3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-3<0$，$g'(1)=\mathrm{e}-1>0$，

故存在 $x_0\in\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$，使得 $g'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，（*）

当 $x\in(0,\ x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减;

当 $x\in(x_0,\ +\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以对 $\forall x\in(0,+\infty)$，均有 $g(x)\geqslant g(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0$，①

由（*）式可得 $x_0=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_0}}$，代入①式得 $g(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0=\mathrm{e}^{x_0}-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_0}}=\mathrm{e}^{x_0}+x_0=x_0+\dfrac{1}{x_0}$，

又 $x_0>0$，所以 $x_0+\dfrac{1}{x_0}\geqslant 2$，当且仅当 $x_0=1$ 时取“=”，但 $x_0\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$，故 $x_0+\dfrac{1}{x_0}>2$，

故 $g(x)\geqslant g(x_0)>2$． ……………………………………………（6 分）

（2）解：由题得 $h(x)=g(x)-f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x+x^2-ax$，$x>0$，

于是函数 $h(x)$ 有两个零点等价于方程 $\mathrm{e}^x-\ln x+x^2-ax=0$ 有两个不同的解，

因为 $x\neq 0$，所以又等价于 $\dfrac{\mathrm{e}^x-\ln x+x^2}{x}-a=0$ 有两个不同的解．

令 $H(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\ln x+x^2}{x}-a$，则 $H'(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x+\ln x+x^2-\mathrm{e}^x-1}{x^2}$，……………………（8 分）

再令 $p(x)=x\mathrm{e}^x+\ln x+x^2-\mathrm{e}^x-1$，则 $p'(x)=x\mathrm{e}^x+2x+\dfrac{1}{x}>0$，

所以 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

又 $p(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$p(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$p(x)>0$，

故当 $x\in(0,1)$ 时，$H'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$H'(x)>0$，

于是当 $x\in(0,1)$ 时，$H(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$H(x)$ 单调递增，即 $H(1)=1+\mathrm{e}-a$ 是 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值，

于是，若 $H(1)=1+\mathrm{e}-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 1+\mathrm{e}$ 时，则当 $x\in(0,1)$ 时，$H(x)>H(1)>0$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$H(x)>H(1)>0$，故 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点 $x=1$；

……………………………………………………（10 分）

若 $H(1)=1+\mathrm{e}-a<0$，即 $a>1+\mathrm{e}$ 时，则当 $x\in(0,1)$ 时，由于 $\dfrac{1}{a}\in(0,1)$，$H(1)<0$，

$$H\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-\ln\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a}}-a=a\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-\ln\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a}-a>2a+\frac{1}{a}-a=a+\frac{1}{a}>0,$$

故 $H(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且仅有一个零点 $x_1\in\left(\dfrac{1}{a},1\right)$；

同理，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，由于 $a\in(1,+\infty)$，$H(1)<0$，

$H(a)=\dfrac{e^a-\ln a+a^2}{a}-a=\dfrac{e^a-\ln a}{a}+a-a>\dfrac{2}{a}+a-a=\dfrac{2}{a}>0$，

故 $H(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且仅有一个零点 $x_2\in(1,a)$，即当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$H(x)$ 共有两个零点 x_1，x_2．

综上，当 $a>1+e$ 时，$h(x)$ 有两个零点．……………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）C 的直角坐标方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，……………………………………………（2 分）

l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=\sqrt{2}+t\sin\alpha,\end{cases}$ (t为参数)．……………………………………（4 分）

（2）将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程得 $\dfrac{(1+t\cos\alpha)^2}{4}+\dfrac{(\sqrt{2}+t\sin\alpha)^2}{3}=1$，

整理得 $(3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha)t^2+2(3\cos\alpha+4\sqrt{2}\sin\alpha)t-1=0$，

……………………………………………………………………………（6 分）

所以 $|PA||PB|=|t_1||t_2|=\dfrac{1}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{3+\sin^2\alpha}$，……………………………（8 分）

而 $\alpha\in[0,\pi)$，故 $\sin^2\alpha\in[0,1]$，

所以 $|PA||PB|=\dfrac{1}{3+\sin^2\alpha}\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right]$．……………………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

（1）解：由 $f(x)=\begin{cases}-2x+4, & x\leqslant 0,\\ 4, & 0<x<4,\\ 2x-4, & x\geqslant 4,\end{cases}$ ……………………………………………（2 分）

得 $f(x)_{\min}=4$，要使 $f(x)\geqslant|m+2|$ 恒成立，

只要 $|m+2|\leqslant 4$，即 $-6\leqslant m\leqslant 2$，故实数 m 的最大值为 2．…………………………（5 分）

（2）证明：由（1）知 $a^2+b^2=2$，又 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，故 $ab\leqslant 1$，

$(a+b)^2-4a^2b^2=a^2+b^2+2ab-4a^2b^2=2+2ab-4a^2b^2=-2(ab-1)(2ab+1)$，

$\because 0<ab\leqslant 1$，$\therefore (a+b)^2-4a^2b^2=-2(ab-1)(2ab+1)\geqslant 0$，

$\therefore a+b\geqslant 2ab$．……………………………………………………………………（10 分）