

云南师大附中 2019 届高考适应性月考卷（二）

文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

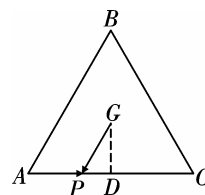
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	A	C	A	A	C	B	A	B	C	B

【解析】

1. $\frac{(a+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(a+2)+(2-a)i}{2}$ ，故选 B.

2. $A = (-3, +\infty)$, $B = (2, +\infty)$ ，故选 D.

3. $y = x \sin x$ 为偶函数，当 $0 < x < \pi$ 时， $\sin x > 0$ ，故选 A.



4. 如图 1，过点 G 作 $GD \perp AC$ ，垂足为 D ，当点 P 位于线段 AD 上时， $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AP} < 0$ ；当点 P 位于线段 DC 上时， $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AP} > 0$ ，故当 $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AP}$ 取得最小值时，点 P 在线段 AD 上，

$$\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AP} = -|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{DP}| = -|\overrightarrow{AP}| \cdot (\sqrt{3} - |\overrightarrow{AP}|), \text{ 当 } |\overrightarrow{AP}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时, 取得最小值 } -\frac{3}{4}, \text{ 故选 C.}$$

5. 一方面，由 $|OF_2| = 2|OH|$ ，得 $|OH| = \frac{1}{2}|OF_2| = \frac{1}{2}c$ ，故 $|F_2H| = \sqrt{|OF_2|^2 - |OH|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ ；另

一方面，双曲线的渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$ ，故 $|F_2H| = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$ ，于是 $\frac{\sqrt{3}}{2}c = b$ ，即

$$\frac{3}{4}c^2 = b^2 = c^2 - a^2, \text{ 故 } a^2 = \frac{1}{4}c^2, \text{ 得 } e = \frac{c}{a} = 2, \text{ 故选 A.}$$

6. 根据正弦定理，由 $c^2 \sin A = 4 \sin C$ ，得 $ac = 4$ ，则由 $B = \frac{\pi}{3}$ ，得 $a^2 + c^2 - b^2 = 4$ ，则 $S_{\triangle ABC} =$

$$\sqrt{\frac{1}{4}(16-4)} = \sqrt{3}, \text{ 故选 A.}$$

7. 该框图是计数 90 到 120（含 90 和 120）之间的个数，可知 $k = 5$ ，故选 C.

8. 设甲和乙参加同一天活动为事件 A ，则所有可能的安排为（甲乙，丙丁），（甲丙，乙丁），（甲丁，乙丙），（乙丙，甲丁），（乙丁，甲丙），（丙丁，甲乙），共 6 种情况，其中符合条件的有（甲乙，丙丁），（丙丁，甲乙），故 $P(A) = \frac{1}{3}$ ，故选 B.



9. 如图 2, 连接 AC_1 , 因为 $A_1B_1 \parallel AB$, 则异面直线 BC_1 与 A_1B_1 的所成角为 $\angle ABC_1$, 由题意得 $AB \perp AC_1$, 异面直线 BC_1 与 A_1B_1 所成角

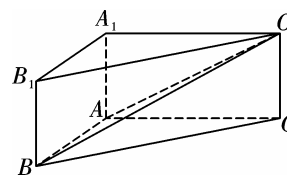


图 2

的正切值为 $\tan \angle ABC_1 = \frac{AC_1}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 故选 A.

10. $f(x) = \sqrt{3}\sin \omega x + \cos \omega x = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 由五点作图法可得其图象如图 3,

$\omega x + \frac{\pi}{6}$	0	...	π	2π
x	$-\frac{\pi}{6\omega}$...	$\frac{5\pi}{6\omega}$	$\frac{11\pi}{6\omega}$
$2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$	0	...	0	0

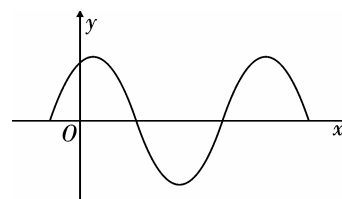


图 3

由题意得 $\frac{5\pi}{6\omega} \leq \pi < \frac{11\pi}{6\omega}$, 即 $\frac{5}{6} \leq \omega < \frac{11}{6}$, 故选 B.

11. 令 $a = b = 0$, 则 $f(0) = f(0)f(0)$, 又因为 $f(0) \neq 0$, 所以 $f(0) = 1$, 故①正确; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 当 $x = 0$ 时, $f(0) = 1$, 即当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1 > 0$; 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 则

$f(-x) > 0$, 由题意得 $f(x-x) = f(x)f(-x)$, 则 $f(x) = \frac{f(0)}{f(-x)} = \frac{1}{f(-x)} > 0$, 故②成立; 对

任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 不妨设 $x_1 > x_2$, 故存在正数 z 使得 $x_1 = x_2 + z$, 则

$f(x_1) - f(x_2) = f(x_2 + z) - f(x_2) = f(x_2)f(z) - f(x_2) = f(x_2)(f(z) - 1)$, 因为当 $x > 0$ 时,

$f(x) > 1$, 所以 $f(z) - 1 > 0$, 因为对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) > 0$, 所以 $f(x_2) > 0$, 故

$f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 故③错误, 故选 C.

12. 如图 4, $|AB| + |AF_2| + |BF_2| = |AF_1| + |AF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 4a = 8$, 由

题意知, 直线不会与 x 轴重合, 可设直线 $AB: my = x + 1$, $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} my = x + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 得 $(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$, $\Delta = 12^2(m^2 + 1)$,

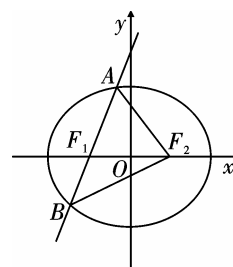


图 4

$$S_{\triangle ABF_2} = S_{\triangle AF_1F_2} + S_{\triangle BF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |y_1| + \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |y_2| = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot (|y_1| + |y_2|) = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{\Delta}}{3m^2 + 4} = \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4} = \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3(m^2 + 1) + 1} = \frac{12}{3\sqrt{m^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}}, \text{ 令 } \sqrt{m^2 + 1} = t \geq 1,$$

则 $3\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} = 3t + \frac{1}{t} = f(t)$, 当 $t \geq 1$ 时, 函数 $f(t)$ 单调递增, 所以 $f(t) \geq f(1) = 4$,

当 $f(t)$ 取得最小值 4 时, $S_{\triangle ABF_2}$ 取得最大值 3, 故选 B.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

题号	13	14	15	16
答案	$y = x$	$\left[-6, \frac{2}{3}\right]$	$\frac{4}{5}$	16π

【解析】

13. $y' = e^x$, 则 $y'|_{x=0} = 1$, 故 $y = x$.

14. 可行域如图 5 阴影部分所示, 根据图形可得 $-6 \leq z \leq \frac{2}{3}$.

15. 由 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$, 得 $\cos\alpha = 2\sin\alpha$, 即 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha = \frac{2\sin\alpha \cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha + 1} = \frac{4}{5}.$$

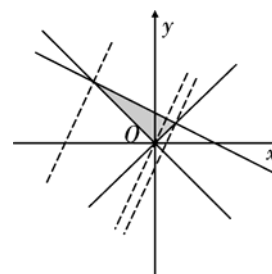


图 5

16. 如图 6, 在正三棱锥 $P-ABC$ 中, D 为 BC 的中点, E 为 $\triangle ABC$ 的中心, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD = 3$, 则 $AE = 2$, 在 $\triangle PAE$ 中, $PE = 2$, 则 $AE = BE = CE = PE = 2$, 故 E 为球心, 球的半径 $r = 2$, 所以球的表面积为 $4\pi r^2 = 16\pi$.

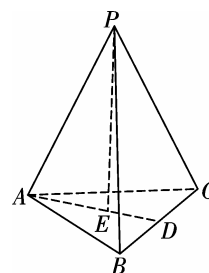


图 6

三、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 12 分)

(1) 解: 由题知当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) - \left[\frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1)\right] = 3n-1$,

所以 $a_n = 3n-1$ (3 分)

设 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则 $b_1 = 2$, $b_1q + b_1q^2 = \frac{3}{2}$, 解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 $q = -\frac{3}{2}$ (舍去),

所以 $b_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ (6 分)

(2) 证明: 由 (1) 得 $c_n = \frac{3n-1}{2^{n-2}}$, 则 $T_n = \frac{2}{2^{-1}} + \frac{5}{2^0} + \frac{8}{2^1} + \cdots + \frac{3n-1}{2^{n-2}}$,

两边同乘 $\frac{1}{2}$, 得 $\frac{1}{2}T_n = \frac{2}{2^0} + \frac{5}{2^1} + \frac{8}{2^2} + \cdots + \frac{3n-1}{2^{n-1}}$, (8 分)

上面两式相减, 得 $\frac{1}{2}T_n = \frac{2}{2^{-1}} + \frac{3}{2^0} + \frac{3}{2^1} + \cdots + \frac{3}{2^{n-2}} - \frac{3n-1}{2^{n-1}} = 10 - \frac{6}{2^{n-1}} - \frac{3n-1}{2^{n-1}}$,

所以 $T_n = 20 - \frac{3n+5}{2^{n-2}}$ (10 分)

因为 $\frac{3n+5}{2^{n-2}} > 0$, 所以 $T_n < 20$ (12 分)

18. (本小题满分 12 分)

解: (1) 由表一得 $\bar{x} = \frac{3+4+5+6}{4} = 4.5$, $\bar{y} = \frac{2.5+3+4+4.5}{4} = 3.5$,

$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 86$, (2 分)

$\therefore \hat{b} = \frac{3 \times 2.5 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 4.5 - 4 \times 4.5 \times 3.5}{86 - 4 \times 4.5^2} = \frac{66.5 - 63}{5} = 0.7$, (4 分)

$\hat{a} = 3.5 - 0.7 \times 4.5 = 0.35$,

所以所求线性回归方程为 $\hat{y} = 0.7x + 0.35$ (6 分)

(2) 当 $x = 7$ 时, $\hat{y} = 0.7 \times 7 + 0.35 = 5.25$,

从而能够节省 $6.5 - 5.25 = 1.25$ 吨原材料. (8 分)

(3) 由表二得 $K^2 = \frac{200 \times (90 \times 15 - 85 \times 10)^2}{100 \times 100 \times 175 \times 25} = \frac{8}{7} < 2.706$, (10 分)

因此, 没有 90% 的把握认为 “改革前后生产的产品的合格率有差异”.

..... (12 分)

19. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 如图 7, $AC = BC = PC = 2$, $AB = PA = PB = 2\sqrt{2}$,

则 $AC^2 + PC^2 = AP^2$, $BC^2 + PC^2 = BP^2$,

所以 $PC \perp AC$, $PC \perp BC$, (2 分)

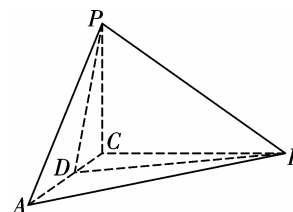


图 7



又因为 $AC \cap BC = C$, $AC \subset$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $PC \perp$ 平面 ABC (4 分)

(2) 解: $AC^2 + BC^2 = BA^2$, 则 $AC \perp BC$,

由 (1) 知 $PC \perp AC$, 则 $AC \perp$ 平面 PBC ,

PD 与平面 PBC 的所成角为 $\angle DPC$, $\tan \angle DPC = \frac{DC}{PC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $CD = \sqrt{3}$.

..... (8 分)

$$V_{D-PAB} = V_{P-ABC} - V_{P-CDB} = \frac{4-2\sqrt{3}}{3}, \quad S_{\triangle PAB} = 2\sqrt{3},$$

则 D 点到平面 PAB 的距离 $d = \frac{3V_{D-PAB}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$ (12 分)

20. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 设点 $M(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则 $P\left(x_0, \frac{x_0^2}{4}\right)$, $x_1 + x_2 = 2x_0$, $y_1 + y_2 = 2y_0$,

由 $x^2 = 4y$, 得 $y = \frac{1}{4}x^2$,

故 $y' = \frac{1}{2}x$, 即抛物线 C 在点 P 处的切线的斜率为 $k_P = y'|_{x=x_0} = \frac{1}{2}x_0$.

..... (2 分)

又直线 l 的斜率 $k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{4}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{4} = \frac{2x_0}{4} = \frac{x_0}{2}$, 即 $k_{AB} = k_P$,

所以直线 l 平行于抛物线 C 在点 P 处的切线. (4 分)

(2) 解: 由 $|PM| = a > 0$, 得 $M\left(x_0, \frac{x_0^2}{4} + a\right)$,

于是直线 $l: y - \left(\frac{x_0^2}{4} + a\right) = \frac{x_0}{2}(x - x_0)$, 即 $l: y = \frac{x_0}{2}(x - x_0) + \left(\frac{x_0^2}{4} + a\right) = \frac{x_0}{2}x - \frac{x_0^2}{4} + a$.

..... (6 分)

联立直线 l 与抛物线 C 得 $\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = \frac{x_0}{2}x - \frac{x_0^2}{4} + a, \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2 - 2x_0x + x_0^2 - 4a = 0$,



$$\therefore x_1 + x_2 = 2x_0, \quad x_1 x_2 = x_0^2 - 4a, \quad \Delta = 4x_0^2 - 4(x_0^2 - 4a) = 16a > 0,$$

..... (8 分)

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |PM| |x_1 - x_2| = \frac{1}{2} \times a \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{1}{2} a \sqrt{(2x_0)^2 - 4(x_0^2 - 4a)} = 2a\sqrt{a},$$

故 $\triangle PAB$ 的面积为定值 $2a\sqrt{a}$ (12 分)

21. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$,

令 $h(x) = g'(x)$, 则 $h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, (2 分)

$$g'\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} - 3 < 0, \quad g'(1) = e - 1 > 0,$$

故存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, 使得 $g'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$, (*)

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 均有 $g(x) \geq g(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0$, ① (4 分)

由 (*) 式可得 $x_0 = \frac{1}{e^{x_0}}$, 代入①式得 $g(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 = e^{x_0} - \ln \frac{1}{e^{x_0}} = e^{x_0} + x_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$,

又 $x_0 > 0$, 所以 $x_0 + \frac{1}{x_0} \geq 2$, 当且仅当 $x_0 = 1$ 时取 “=”, 但 $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, 故 $x_0 + \frac{1}{x_0} > 2$,

故 $g(x) \geq g(x_0) > 2$ (6 分)

(2) 解: 要想使 $g(x) \geq f(x)$ 恒成立, 即 $e^x - \ln x \geq -x^2 + ax$ 成立, 即 $e^x - \ln x + x^2 \geq ax$ 成立,

又 $x > 0$, 即只需 $\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} + x \geq a$, (8 分)

$$\text{令 } F(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} + x, \quad F'(x) = \frac{x e^x - e^x}{x^2} - \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x e^x - e^x - 1 + \ln x + x^2}{x^2},$$

$$\text{令 } G(x) = x e^x - e^x - 1 + \ln x + x^2, \quad G'(x) = e^x + x e^x - e^x + \frac{1}{x} + 2x = x e^x + \frac{1}{x} + 2x > 0,$$

..... (10 分)

所以 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $G(1)=0$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $G(x) < 0$, 即 $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减;

所以当 $x > 1$ 时, $G(x) > 0$, 即 $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增,

$$F(x) \geq F(1) = e+1,$$

故当 $a \leq e+1$ 时, 对任意的 $x > 0$, $g(x) \geq f(x)$ 恒成立. (12 分)

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

解: (1) C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, (2 分)

l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha, \\ y = \sqrt{2} + t \sin \alpha, \end{cases}$ (t 为参数). (4 分)

(2) 将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程得 $\frac{(1+t \cos \alpha)^2}{4} + \frac{(\sqrt{2}+t \sin \alpha)^2}{3} = 1$,

整理得 $(3 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha)t^2 + 2(3 \cos \alpha + 4\sqrt{2} \sin \alpha)t - 1 = 0$,
..... (6 分)

所以 $|PA||PB| = |t_1||t_2| = \frac{1}{3 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{3 + \sin^2 \alpha}$, (8 分)

而 $\alpha \in [0, \pi)$, 故 $\sin^2 \alpha \in [0, 1]$,

所以 $|PA||PB| = \frac{1}{3 + \sin^2 \alpha} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ (10 分)

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

(1) 解: 由 $f(x) = \begin{cases} -2x+4, & x \leq 0, \\ 4, & 0 < x < 4, \\ 2x-4, & x \geq 4, \end{cases}$ (2 分)

得 $f(x)_{\min} = 4$, 要使 $f(x) \geq |m+2|$ 恒成立,

只要 $|m+2| \leq 4$, 即 $-6 \leq m \leq 2$, 故实数 m 的最大值为 2. (5 分)

(2) 证明: 由 (1) 知 $a^2 + b^2 = 2$, 又 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 故 $ab \leq 1$,

$$(a+b)^2 - 4a^2b^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 4a^2b^2 = 2 + 2ab - 4a^2b^2 = -2(ab-1)(2ab+1),$$

$$\because 0 < ab \leq 1, \therefore (a+b)^2 - 4a^2b^2 = -2(ab-1)(2ab+1) \geq 0,$$

$$\therefore a+b \geq 2ab. \quad \dots\dots (10 \text{ 分})$$