云南师大附中2019届高考适应性月考卷（三）
文科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	B	C	A	B	D	C	D	C	B	B

【解析】

1．$M=\left\{x\left|\frac{4}{x}>1,\ x\in\mathbf{N}\right.\right\}=\{1,\ 2,\ 3\}$，则$M$的非空子集的个数为$2^3-1=7$，故选C．

2．$\bar{z}(\mathrm{i}+1)(1-\mathrm{i})=(2\mathrm{i}-1)(1-\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}$，$\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$，$z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$，故选B．

3．$a_1+a_7=a_2+a_6=a_3+a_5=2a_4=2$，$a_8+a_9=9$，$\therefore S_9=16$，故选B．

4．由三视图可知该几何体是一个平行六面体，上下底面为俯视图的一半，各个侧面为平行四边形，故体积$V=Sh=3\times3\times6=54$，故选C．

5．$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin2\alpha=\frac{1}{4}$，$\sin2\alpha=-\frac{3}{4}$，$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin2\alpha=\frac{3}{4}$，故选A．

6．由题意可知$i=2,\ x=2$；$i=3,\ x=2+4$；$i=4,\ x=2+4+6$；$\cdots$；$i=55,\ x=2+4+\cdots+108$，最后输出的$x=\frac{2+4+6+\cdots+108}{54}=55$，故选B．

7．$|3\vec{m}-2\vec{n}|^2=9|\vec{m}|^2-12|\vec{m}||\vec{n}|\cos60°+4|\vec{n}|^2=13$，$2|\vec{n}|^2-3|\vec{n}|-2=0$，解得$|\vec{n}|=2$，故选D．

8．他只能再试两次，第一次试成功的概率是$\frac{1}{4}$，第二次试成功的概率是$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$，两次是互斥事件，$\therefore P=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，故选C．

9．由题意知，当球与正三棱柱的部分面相切时，体积最大，若球与三个侧面都相切时，选取过球心且平行于正三棱柱底面的截面，此时球的半径为$\sqrt{3}$；若球与上下底面相切时，此时球的半径为2，而$2>\sqrt{3}$，故球放不进去，所以半径为$\sqrt{3}$时，球的体积最大，$\therefore V_{\max}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times3\sqrt{3}=4\sqrt{3}\pi$，故选D．

10．由题可知 $f(-1)=1$，$f(0)=0$，$\therefore f(1)=f(0)-f(-1)=0-1=-1$，$f(2)=f(1)-f(0)=-1-0=-1$，$f(3)=f(2)-f(1)=-1+1=0$，$f(4)=f(3)-f(2)=0+1=1$，$f(5)=f(4)-f(3)=1-0=1$，$f(6)=f(5)-f(4)=1-1=0$，…，当 $n=1, 2, 3, \cdots$ 时，$f(n)$ 的取值依次是 $-1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, \cdots$，故 $f(x)$ 的取值是以 6 为周期，$\therefore f(2019)=f(3)=0$，故选 C．

11．由题意可知 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$，一条渐近线方程为 $y=-\dfrac{b}{a}x$，F_1 到它的距离为 $d=\dfrac{|0-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，$PF_1$ 与渐近线交于 M，则 $F_1M=MP=b$，由 $\angle OPF_2=\angle POF_2$，得 $OP=OF_2=c$，又 O 为 F_1F_2 的中点，$\therefore OM // F_2P$，$\therefore \angle F_2PF_1$ 为直角，$\therefore 4c^2=c^2+4b^2 \Rightarrow 3c^2=4(c^2-a^2)$，$\therefore c^2=4a^2 \Rightarrow e=\dfrac{c}{a}=2$，故选 B．

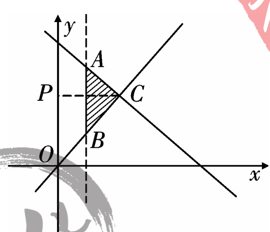
12．令 $F(x)=\dfrac{f(x)+2}{\mathrm{e}^x}$，则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)-2}{\mathrm{e}^x}>0$，$\therefore F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，又 $f(1)=\mathrm{e}-2$，$\therefore F(1)=\dfrac{f(1)+2}{\mathrm{e}}=1$，$\because f(x)+2>\mathrm{e}^x$ 可化为 $\dfrac{f(x)+2}{\mathrm{e}^x}>1$，即 $F(x)>F(1)$，$\therefore x\in(1, +\infty)$，故选 B．

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$(1, 4]$	$y=-2x+1$	$1009m$	-1

【解析】

13．如图，画出不等式组的区域，$A(1, 3)$，$B(1, 1)$，$C(2, 2)$，$x^2+(y-2)^2$ 表示△ABC 内部的点 $M(x, y)$ 到 $P(0, 2)$ 的距离的平方，所以 $1<x^2+(y-2)^2\leqslant 4$．



14．$y'=-3\mathrm{e}^x+(-3x+1)\mathrm{e}^x=(-3x-2)\mathrm{e}^x$，所以 $k=y'|_{x=0}=-2$，故切线方程为 $y-1=-2(x-0)$，即 $y=-2x+1$．

15．在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1a_{2018}=a_2a_{2017}=\cdots=a_{1008}a_{1011}=a_{1009}a_{1010}=10^m$，$\therefore \lg a_1+\lg a_2+\cdots+\lg a_{2018}=\lg(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{2018})=\lg(a_1\cdot a_{2018})^{1009}=1009\lg 10^m=1009m$．

16．$\because F(1,\ 0),\ P(-1,\ 0)$，设 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$，$l$： $y=k(x+1)$，由 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 k^2x^2

$+(2k^2-4)x+k^2=0 \Rightarrow x_1+x_2=\dfrac{4-2k^2}{k^2}$，$x_1 \bullet x_2=1$，$\dfrac{m}{n}=\dfrac{y_1}{x_1-1}\bullet\dfrac{x_2-1}{y_2}=\dfrac{k(x_1+1)}{x_1-1}\bullet\dfrac{x_2-1}{k(x_2+1)}$

$=\dfrac{(x_1+1)}{(x_1-1)}\bullet\dfrac{(x_2-1)}{(x_2+1)}=\dfrac{x_1 \bullet x_2-(x_1-x_2)-1}{x_1 \bullet x_2+(x_1-x_2)-1}=-1$.

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

解：（1）$\because \sin B=\dfrac{5}{13}$，$\cos\angle ADC=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore \cos B=\dfrac{12}{13}$，$\sin\angle ADC=\dfrac{3}{5}$，

$\because \sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-B)=\sin\angle ADC\cos B-\cos\angle ADC\sin B=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{12}{13}-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{16}{65}$，

由正弦定理，得 $AD=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}\times\sin B=16\times\dfrac{65}{16}\times\dfrac{5}{13}=25$．

……………………………………………………………………（6 分）

（2）$\because \sin\angle BDA=\sin(\pi-\angle ADC)=\sin\angle ADC=\dfrac{3}{5}$，

由正弦定理，得 $AB=\dfrac{AD}{\sin B}\times\sin\angle BDA=25\times\dfrac{13}{5}\times\dfrac{3}{5}=39$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BA\bullet BC\bullet\sin B=\dfrac{1}{2}\times39\times32\times\dfrac{5}{13}=240$．　……………………………（12 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）由表中数据知 $\overline{x}=3$，$\overline{y}=100$，　……………………………………………（2 分）

$\therefore \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{1415-1500}{55-45}=-8.5$，　……………………………………………（3 分）

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=125.5$，

$\therefore$所求回归直线方程为 $\hat{y}=-8.5x+125.5$．　……………………………………（5 分）

令 $x=9$，则 $\hat{y}=-8.5\times9+125.5=49$，

∴该学校第 9 周的不文明人次为 49 人次．……………………………………………………（6 分）

（2）设高一年级的 4 位同学的编号分别为 a_1，a_2，a_3，a_4，高二年级的 2 位同学的编号分别为 b_1，b_2，

从这 6 人中任选 2 人包含以下基本事件：$(a_1,\ a_2)$，$(a_1,\ a_3)$，$(a_1,\ a_4)$，$(a_1,\ b_1)$，$(a_1,\ b_2)$，$(a_2,\ a_3)$，$(a_2,\ a_4)$，$(a_2,\ b_1)$，$(a_2,\ b_2)$，$(a_3,\ a_4)$，$(a_3,\ b_1)$，$(a_3,\ b_2)$，$(a_4,\ b_1)$，$(a_4,\ b_2)$，$(b_1,\ b_2)$，

共 15 个基本事件，

其中两人恰好来自同一年级包含 7 个基本事件，

∴所求概率 $P=\dfrac{7}{15}$． ……………………………………………………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

（1）证明：在 $\triangle PCD$ 中，$PC=PD=\sqrt{2},\ CD=2$，$PC^2+PD^2=CD^2$，

∴ $PC\perp PD$，

∵ $\angle CDA=90^\circ$，∴ $AD\perp CD$，

又平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，

∴ $AD\perp$ 平面 PCD，∴ $AD\perp PC$，

又 $PD\cap AD=D$，∴ $PC\perp$ 平面 PAD，

∵ $PC\subset$ 平面 PBC，

∴平面 $PAD\perp$ 平面 PBC． ……………………………………………………………（6 分）

（2）解：取 CD 的中点 O，连接 PO，

∵ $PC=PD=\sqrt{2}$，∴ $PO\perp CD,\ PO=1$，

又平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，

∴ $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 E 为 PB 的中点，所以点 E 到平面 PAD 的距离等于点 B 到平面 PAD 的距离的一半，

∴ $V_{E-PAD}=\dfrac{1}{2}V_{B-PAD}=\dfrac{1}{2}V_{P-ABD}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ABD}\times PO=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times1=\dfrac{1}{12}$．

……………………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）由已知得 $\angle AF_2F_1 = 45°$，

所以由 $AB \perp AF_1$ 和椭圆的定义，得 $AF_1 = AF_2 = a$，

并且 $2a^2 = 4c^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2$，又 $S_{\triangle F_1AF_2} = 4$，

得 $a^2 = 8$，$c^2 = 4$，故 $b^2 = a^2 - c^2 = 4$，

所以椭圆 E：$\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$． ……………………………………………………（4 分）

（2）直线 l_1：$y = -x + 2$，代入 $x^2 + 2y^2 = 8$，得 $3x^2 - 8x = 0$，

从而得 $A(0,\ 2)$，$B\left(\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$，此时 $|AB| = \dfrac{8}{3}\sqrt{2}$，

又设直线 l_2：$y = x + m$，由条件知 $-\dfrac{10}{3} < m < 2$，

将 $y = x + m$ 代入 $x^2 + 2y^2 = 8$，得 $3x^2 + 4mx + 2m^2 - 8 = 0$，

设 $C(x_1,\ y_1)$，$D(x_2,\ y_2)$，

则 $x_1 + x_2 = -\dfrac{4}{3}m$，$x_1x_2 = \dfrac{2m^2 - 8}{3}$， ……………………………………………（7 分）

所以 $|CD| = \sqrt{2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{16m^2}{9} - \dfrac{4(2m^2 - 8)}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{-8m^2 + 96}$，

又 $-\dfrac{10}{3} < m < 2$，$\therefore 0 \leqslant m^2 < \dfrac{100}{9}$，$\therefore \dfrac{64}{9} < -8m^2 + 96 \leqslant 96$， ……………………（10 分）

$\therefore \dfrac{8}{9}\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \times \dfrac{8}{3} < |CD| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{96} = \dfrac{8}{3}\sqrt{3}$，当且仅当 $m = 0$ 时取等号，

$\because S_{ACBD} = \dfrac{1}{2}|AB| \cdot |CD|$，

$\therefore S_{ACBD} > \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{3}\sqrt{2} \times \dfrac{8}{9}\sqrt{2} = \dfrac{64}{27}$，$S_{ACBD} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{3}\sqrt{2} \times \dfrac{8}{3}\sqrt{3} = \dfrac{32}{9}\sqrt{6}$，

综上，四边形 $ACBD$ 面积的取值范围是 $\left(\dfrac{64}{27},\ \dfrac{32}{9}\sqrt{6}\right]$． ……………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）当 $a=-1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2+5-\ln x$，

$\therefore f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}(x>0)$，

由 $f'(x)>0$，解得 $x>1$；由 $f'(x)<0$，解得 $0<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上为减函数，在 $(1,\ +\infty)$ 上为增函数. ……………………………（4 分）

（2）$f'(x)=x-(a+1)+\frac{a}{x}=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x}(x>0)$，

当 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,\ \mathrm{e}]$ 上为增函数，$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=\frac{9}{2}-a$；

当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(1,\ a)$ 上为减函数，在 $(a,\ \mathrm{e})$ 上为增函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f(a)=-\frac{a^2}{2}-a+5+a\ln a$；

当 $a\geqslant \mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,\ \mathrm{e}]$ 上为减函数，$\therefore f(x)_{\min}=f(\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-(a+1)\mathrm{e}+5+a$，

综上所述，当 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)_{\min}=\frac{9}{2}-a$；

当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{a^2}{2}-a+5+a\ln a$；

当 $a\geqslant \mathrm{e}$ 时，$f(x)_{\min}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-(a+1)\mathrm{e}+5+a$. ……………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）$\because \rho=2$，$\therefore \rho^2=4$，

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=4$. ……………………………………（1 分）

由点 A 的极坐标为 $\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$，知点 A 的直角坐标为 $(\sqrt{3},\ 1)$，

菱形 $ABCD$ 的顶点都在圆 C_2 上，所以菱形 $ABCD$ 是正方形，

故知各顶点的直角坐标为 $A(\sqrt{3},\ 1)$，$B(-1,\ \sqrt{3})$，$C(-\sqrt{3},\ -1)$，$D(1,\ -\sqrt{3})$.

……………………………………………………………………………（5 分）

（2）$\sqrt{|MA|^2+|MC|^2}\cdot\sqrt{|MB|^2+|MD|^2}$

$=\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2+(x+\sqrt{3})^2+(y+1)^2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2+(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{2x^2+2y^2+8}\cdot\sqrt{2x^2+2y^2+8}=2x^2+2y^2+8$，

将 $4x^2-y^2-4=0$ 带入上式，得 $\sqrt{|MA|^2+|MC|^2}\cdot\sqrt{|MB|^2+|MD|^2}=10x^2$，

$\because |x|\geqslant 1$，$\therefore x^2\geqslant 1$，$\therefore \sqrt{|MA|^2+|MC|^2}\cdot\sqrt{|MB|^2+|MD|^2}\geqslant 10$，

当 $x=\pm 1$ 时，取得最小值 10. ……………………………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

（1）解：当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|=\begin{cases}-2x,\ x<-\frac{1}{2},\\ 1,\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2x,\ x>\frac{1}{2},\end{cases}$

结合图象知，不等式 $f(x)<2$ 的解集 $M=\{x|-1<x<1\}$， ……………………………（2 分）

同理可得，当 $a=\frac{1}{4}$ 时，不等式 $f(x)<1$ 的解集 $P=\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$.

………………………………………………………………………………………（4 分）

（2）证明：$\because m\in M$，$n\in P$，

$\therefore -1<m<1$，$-\frac{1}{2}<n<\frac{1}{2}$，$m^2<1$，$4n^2<1$，

$(m+2n)^2-(1+2mn)^2=m^2+4n^2-4m^2n^2-1=(m^2-1)(1-4n^2)<0$，

$\therefore (m+2n)^2<(1+2mn)^2$，即 $|m+2n|<|1+2mn|$. ……………………………（10 分）