2019年云南省第二次高中毕业生复习统一检测

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。

1．D	2．D	3．C	4．C	5．B	6．A
7．B	8．A	9．B	10．A	11．C	12．D

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13．280；　　14．3；　　15．5；　　16．$[1,2]$．

三、解答题：本大题共6小题，共70分。

17.（12分）

解：（1）$\because a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$，

$\therefore 2R\sin A\sin B-\sqrt{3}\times 2R\sin B\cos A=0$．

化简得 $\sin A-\sqrt{3}\cos A=0$．……2分

$\therefore \tan A=\sqrt{3}$．……4分

$\because 0<A<\pi$，

$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．……6分

（2）$\because a=3$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore 9=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$．……8分

$\because b^2+c^2\ge 2bc$，

$\therefore bc\le 9$．……10分

$\therefore S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\le\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$．　$\because$当 $b=c$ 时，$bc=9$，

即 $b=c=3$ 时，$S=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$．

$\therefore S$ 的最大值为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，此时，$b=c=3$．……12分

18．（12 分）

解：(1) 依据题意计算得：

$\bar{x}=\dfrac{90+92+93+94+96}{5}=93$， $\bar{y}=\dfrac{87+89+89+92+93}{5}=90$，……………2 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(-3)^2+(-1)^2+0^2+1^2+3^2=20$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-3)\times(-3)+(-1)\times(-1)+0\times(-1)+1\times2+3\times3$

$=21$，………………………………………………………………………………4 分

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{21}{20}$， $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\,\bar{x}=90-\dfrac{21}{20}\times93=-\dfrac{153}{20}$．

∴所求回归方程为 $\hat{y}=\dfrac{21}{20}x-\dfrac{153}{20}$． ……………………………………………6 分

（2）由题设得随机变量 X 的可能取值为 $0,1,2$．………………………………7 分

由已知得 $P(X=0)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$．

∴ X 的分布列为：

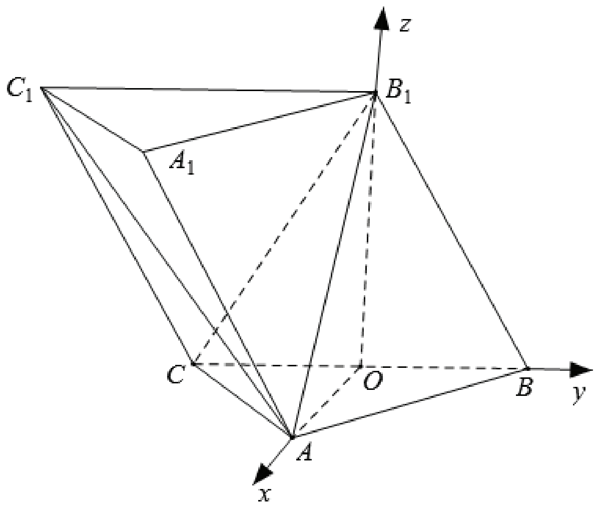
X	0	1	2
P	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{10}$

……………………………………………………………………………10 分

$E(X)=0\times\dfrac{3}{10}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{5}$．…………………………………………12 分

19.（12 分）

（1）证明：取 BC 的中点 O，连接 AO，B_1O，B_1C.



$\because AB=AC$，

$\therefore BC\perp AO$.……………………1 分

$\because BCC_1B_1$ 是菱形，$\angle BB_1C_1=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore \angle B_1BC=\dfrac{\pi}{3}$，$B_1B=BC$.

$\therefore \Delta B_1BC$ 是正三角形.

$\therefore BC\perp B_1O$.…………………2 分

$\because AO\subset$ 平面 AOB_1，$B_1O\subset$ 平面 AOB_1，$B_1O\cap AO=O$，

$\therefore BC\perp$ 平面 AOB_1.………………………………………………………………4 分

$\because AB_1\subset$ 平面 AOB_1，

$\therefore BC\perp AB_1$.……………………………………………………………………………5 分

（2）解：$\because \angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$，$AB=AC$，

$\therefore \Delta ABC$ 是以 BC 为底的等腰直角三角形.

$\because BC=4$，

$\therefore AO=BO=CO=2$.

$\therefore B_1O=BB_1\sin\angle B_1BO=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

$\because$ 平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABC，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $ABC=BC$，

$B_1O\subset$ 平面 AOB_1，$B_1O\perp BC$，

$\therefore B_1O\perp$ 平面 ABC.

$\because AO\subset$ 平面 ABC，$BO\subset$ 平面 ABC，

$\therefore B_1O \perp AO$， $B_1O \perp BO$.

再由（1）得 AO， BO， B_1O 两两互相垂直.……………………………………6 分

分别以射线 OA，OB，OB_1 为 x 轴， y 轴， z 轴的非负半轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，可得 $A(2,0,0)$， $B_1(0,0,2\sqrt{3})$， $C(0,-2,0)$， $C_1(0,-4,2\sqrt{3})$，

$\therefore \overrightarrow{B_1A}=\left(2,0,-2\sqrt{3}\right)$， $\overrightarrow{B_1C_1}=\left(0,-4,0\right)$.

设平面 AB_1C_1 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1A}=2x-2\sqrt{3}z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=-4y=0.\end{cases}$

取 $z=1$，得 $x=\sqrt{3}$，所以 $\vec{n}=(\sqrt{3},0,1)$ 是平面 AB_1C_1 的一个法向量.……………8 分

同理可得平面 AA_1C_1 的一个法向量 $\vec{m}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$.……………………………10 分

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ……………………………………………………11 分

$\therefore$ 二面角 $B_1-AC_1-A_1$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ………………………………………12 分

20.（12 分）

解：（1）由已知得直线 l 的方程为： $y=x+\dfrac{1}{4}$，设 $Q(m,-\dfrac{1}{4})$.………………………2 分

由 $\begin{cases}y=x^2,\\ y=x+\dfrac{1}{4}\end{cases}$ 得 $4x^2-4x-1=0$， $\Delta=(-4)^2+4\times4>0$.

$\therefore \begin{cases}x_A+x_B=1,\\ x_Ax_B=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$ ……………………………………………………………3 分

由 $\angle AQB=\dfrac{\pi}{2}$ 得 $2x_Ax_B+(\dfrac{1}{2}-m)(x_A+x_B)+m^2+\dfrac{1}{4}=0$.

$\therefore 2\times(-\dfrac{1}{4})+(\dfrac{1}{2}-m)\times1+m^2+\dfrac{1}{4}=0$，解得 $m=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore Q$ 点的坐标为 $(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4})$.………………………………………………………4 分

（2）设 $M(x_1, x_1^2)$， $N(x_2, x_2^2)$，直线 $MN: y=-x+t$，

由已知得 $l_1: y=2x_1x-x_1^2$， $l_2: y=2x_2x-x_2^2$，

解 $\begin{cases} y=2x_1x-x_1^2, \\ y=2x_2x-x_2^2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=x_1x_2. \end{cases}$

$\therefore P(\dfrac{x_1+x_2}{2}, x_1x_2)$.…………………………………………………………………6 分

由 $\begin{cases} y=x^2, \\ y=-x+t \end{cases}$ 得 $x^2+x-t=0$.

由题意得 $\Delta=1+4t>0$，即 $t>-\dfrac{1}{4}$.

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=-1, \\ x_1x_2=-t, \end{cases}$ $P(-\dfrac{1}{2}, -t)$.…………………………………………………7 分

$\because OP \perp OQ$，

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{t}{4}=0$，解得 $t=1$.

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=-1, \\ x_1x_2=-1. \end{cases}$ ……………………………………………………………………8 分

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+(x_1x_2)^2=0$.

$\therefore OM \perp ON$.

$\therefore MN$ 为 ΔMON 外接圆的直径.

又 $\because \dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2}=\dfrac{3}{2}$,

$|MN|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2^2-x_1^2)^2}=\sqrt{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2][1+(x_1+x_2)^2]}=\sqrt{10}$，

$\therefore \Delta MON$ 外接圆的圆心为 $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2})$，半径为 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.……………………………10 分

$\therefore \Delta MON$ 外接圆的标准方程为 $(x+\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{5}{2}$. ………………………………12 分

21.（12 分）

（1）证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x^2$，$f'(x)=e^x-2x$，……………………………1 分

令 $\varphi(x)=f'(x)$，则 $\varphi'(x)=e^x-2$.

∴当 $0<x<\ln 2$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x>\ln 2$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增.

∴当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(\ln 2)=2(1-\ln 2)>0$.

∴当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.……………………3 分

∴当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)>f(0)=1>0$，即 $e^x>x^2$.………………………………4 分

（2）解：由题设得 $f'(x)=e^x-2ax$. 由 $f(x)$ 有极大值得 $f'(x)=0$ 有解，且 $a>0$.

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-2a$. 由 $g'(x)=0$ 得 $x=\ln(2a)$.

∴当 $x<\ln(2a)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x>\ln(2a)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

∴ $g(x)_{\min}=g(\ln 2a)=2a[1-\ln(2a)]$.…………………………………………………6 分

当 $g(x)_{\min}\ge 0$，即 $0<a\le\dfrac{e}{2}$ 时，$g(x)\ge 0$，即 $f'(x)\ge 0$，此时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值；

当 $g(x)_{\min}<0$，即 $a>\dfrac{e}{2}$ 时，

∴ $g(0)=1>0$，$g(\ln 2a)=2a(1-\ln 2a)<0$.

由（1）知：$g(2a)=e^{2a}-(2a)^2>0$，即 $2a>2\ln 2a>\ln 2a$.

∴存在 $x_1\in(0,\ln 2a)$，$x_2\in(\ln 2a\,,\,2a)$，使 $g(x_1)=g(x_2)=0$.………………8 分

∴当 $x\in(-\infty,x_1)$ 时，$g(x)>0$，即 $f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$g(x)<0$，即 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，即 $f(x)$ 单调递增.

∴ x_1 是 $f(x)$ 唯一的极大值点.

综上所述，所求 a 的取值范围为 $(\dfrac{e}{2},+\infty)$.……………………………………9 分

（3）证明：由（2）知：当$a>\frac{e}{2}$时，$f(x)$有唯一的极大值点$x_0=x_1\in(0,\ln(2a))$，

且$g(1)=e-2a<0$，故$x_0\in(0,1)$.

由（2）知：$f(x_0)>f(0)=1$.……………………………………………………10 分

当$a=\frac{e}{2}$时，$f(x)=e^x-\frac{e}{2}x^2$，由（2）知：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.

∴当$x<1$时，$f(x)<f(1)=\frac{e}{2}$，即$e^x-\frac{e}{2}x^2<\frac{e}{2}$. ………………………………11 分

∴当$a>\frac{e}{2}$时，$f(x_0)=e^{x_0}-a{x_0}^2<e^{x_0}-\frac{e}{2}{x_0}^2<\frac{e}{2}$.

综上所述，$1<f(x_0)<\frac{e}{2}$.……………………………………………………12 分

22.（10 分）选修$4-4$：坐标系与参数方程

解：（1）点P的直角坐标为$(\sqrt{3},1)$，……………………………………………2 分

曲线C的极坐标方程为$\rho^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$. ………………………………5 分

（2）由(1)知曲线C：$\rho^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$.

由A，B是曲线C上的两个动点，且$OA\perp OB$，

不妨设$A(\rho_1,\theta)$，$B(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{2})$，且$|OA|^2=\rho_1^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$，

$$|OB|^2=\rho_2^2=\frac{4}{1+3\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})}=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}.$$ ………………………………7 分

$$\therefore |OA|^2+|OB|^2={\rho_1}^2+{\rho_2}^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}+\frac{4}{1+3\cos^2\theta}$$

$$=\frac{20}{(1+3\sin^2\theta)(1+3\cos^2\theta)}=\frac{20}{4+\frac{9}{4}\sin^2 2\theta}$$ ……………………9 分

$$\geq\frac{20}{4+\frac{9}{4}}=\frac{16}{5}.$$

当$\sin^2 2\theta=1$时，$|OA|^2+|OB|^2={\rho_1}^2+{\rho_2}^2=\frac{16}{5}$.

∴$|OA|^2+|OB|^2$的最小值为$\frac{16}{5}$. ……………………………………………10 分

23.（10 分）选修 $4-5$：不等式选讲

解：（1）由 $f(x)\ge 2$ 得 $\left|x^2-1\right|\ge 2$，即 $x^2-1\ge 2$ 或 $x^2-1\le -2$.

解 $x^2-1\ge 2$ 得 $x\ge\sqrt{3}$ 或 $x\le-\sqrt{3}$.……………………………………………2 分

由 $x^2-1\le -2$ 得 $x^2\le -1$，不成立.

∴ $x^2-1\le -2$ 无实数解. ……………………………………………………………4 分

∴原不等式的解集为 $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$. ……………………………………5 分

（2）∵ $f(x)+5\le ax$ 的解集非空，即 $\left|x^2-1\right|+5\le ax$ 有解，

当 $x\le 0$ 时，由 $a>0$ 得 $ax\le 0$，$\left|x^2-1\right|+5>0$，

∴当 $x\le 0$ 时，$\left|x^2-1\right|+5\le ax$ 无解. ……………………………………………6 分

① 当 $0<x\le 1$ 时，不等式 $\left|x^2-1\right|+5\le ax$ 化为 $a\ge\dfrac{\left|x^2-1\right|+5}{x}=\dfrac{6}{x}-x$.

∵函数 $h(x)=\dfrac{6}{x}-x$ 在 $(0,1]$ 上为单调递减函数，

∴当 $x\in(0,1]$ 时，$h(x)=\dfrac{6}{x}-x$ 的最小值为 $h(1)=5$.

∴ $a\ge 5$. ……………………………………………………………………7 分

② 当 $x\ge 1$ 时，由 $\left|x^2-1\right|+5\le ax$ 得 $a\ge\dfrac{\left|x^2-1\right|+5}{x}=x+\dfrac{4}{x}$，

而 $x+\dfrac{4}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$（$x=2$ 时，等号成立）.

即 $x+\dfrac{4}{x}$ 的最小值为 4.

∴ $a\ge 4$. ……………………………………………………………………9 分

综上所述，a 的取值范围是 $[4,+\infty)$. ……………………………………10 分

请注意：以上参考答案与评分标准仅供阅卷时参考，其他答案请参考评分标准酌情给分.