

昆明市 2020 届高三“三诊一模”摸底诊断测试

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	A	C	B	B	D	A	D	B	B	A

二、填空题

13. $(\sqrt{3}, -1)$ (只要填写形如 $(\sqrt{3}\lambda, -\lambda)$ ($\lambda \neq 0$) 的向量都正确)

14. 600 15. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 16. 1880

三、解答题

17. (1) 证明: 因为 $AD = AA_1$, 所以四边形 AA_1D_1D 是正方形, 所以 $A_1D \perp AD_1$,

又四边形 ABC_1D_1 是平行四边形, 所以 $AD_1 \parallel BC_1$, 所以 $A_1D \perp BC_1$,2 分

因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $C_1D_1 \perp$ 平面 AA_1D_1D , 所以 $A_1D \perp C_1D_1$,

又 $BC_1 \cap C_1D_1 = C_1$, $BC_1, C_1D_1 \subset$ 平面 BC_1D_1 , 所以 $A_1D \perp$ 平面 BC_1D_1 ,4 分

而 $A_1D \subset$ 平面 A_1BD , 所以平面 $A_1BD \perp$ 平面 BC_1D_16 分

(2) 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,

设 $AD = AA_1 = 1$, 则 $AB = 2$, $A_1(1, 0, 1)$, $B(1, 2, 0)$,

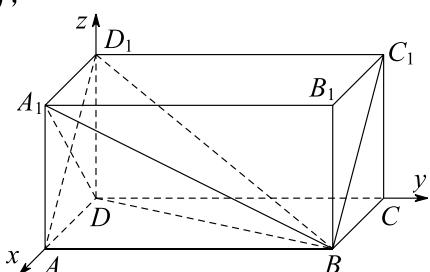
$D(0, 0, 0)$, $D_1(0, 0, 1)$,7 分

设平面 BDD_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$\overrightarrow{DD_1} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{DB} = (1, 2, 0)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{DD_1} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0, \\ x_1 + 2y_1 = 0, \end{cases}$ 取 $y_1 = -1$, 所以 $\mathbf{n}_1 = (2, -1, 0)$,9 分

设平面 A_1BD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{DA_1} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{DB} = (1, 2, 0)$,



$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DA_1} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + z_2 = 0, \\ x_2 + 2y_2 = 0, \end{cases} \text{取 } y_2 = -1, \text{ 所以 } \mathbf{n}_2 = (2, -1, -2), \dots \quad 11 \text{ 分}$$

故 $\cos\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 又二面角 A_1-BD-D_1 是锐角,

所以, 二面角 A_1-BD-D_1 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 12 分

$$18. \text{ 解: (1)} \because b_1 + b_2 = 5, \therefore b_1(1+q) = 5,$$

$$\therefore a_3 = a_1 + 2d = 5, \quad \therefore a_1 = 5 - 2d,$$

$$\therefore (5 - 2d)(1 + 2d) = 5,$$

解得: $d_1 = 0, d_2 = 2$, 4 分

若 $d = 0$, $q = 2d = 0$ (舍去)

$$\text{右 } d = 2, \quad q = 2d = 4,$$

$$4(4^{n-1}-1)$$

6-5-5

$$= 1 + 2 \times \frac{4(4 - 1)}{4 - 1} - (2n - 1) \times 4^n$$

$$= -\frac{8n-5}{3} \times 4^n - \frac{5}{3}$$

19. 解: 设 $P(x_0, y_0)$, 由 $|PF|=4$ 得 $1+x_0=4$, 解得: $x_0=3$,1分
 所以 $y_0=\pm 2\sqrt{3}$2分
 所以 $k_{PF}=\frac{\pm 2\sqrt{3}-0}{3-1}=\pm\sqrt{3}$,
 所以直线 PF 的方程为: $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ 或 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$4分

(2) 设 $P(\frac{y_0^2}{4}, y_0)$ ($y_0 \neq 0$), 则 $M(-1, y_0)$,

直线 OM 的方程为: $y=-y_0x$6分

联立 $\begin{cases} y=-y_0x \\ y^2=4x \end{cases}$ 得: $y_0^2x^2-4x=0$, 解得 $Q(\frac{4}{y_0^2}, -\frac{4}{y_0})$8分

①当 $y_0=\pm 2$ 时, 直线 PQ 的方程为 $x=1$,9分

②当 $y_0 \neq \pm 2$ 时, 直线 PQ 方程为: $y-y_0=\frac{4y_0}{y_0^2-4}(x-\frac{y_0^2}{4})$,

化简得: $y=\frac{4y_0}{y_0^2-4}(x-1)$,11分

综上①②, 可知直线 PQ 恒过点 $(1, 0)$12分

20. 解: (1) 因为 $|r_1|=0.96$, $|r_2|=0.99$, $0.96 < 0.99 < 1$,

由线性相关系数的意义可知, $\hat{y}=\hat{b}z+\hat{a}$ 更合适,2分

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^6(z_i-\bar{z})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^6(z_i-\bar{z})^2}=\frac{\sum_{i=1}^6z_iy_i-6\bar{z}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^6z_i^2-6\bar{z}^2}=\frac{8.16-6\times 3.40\times 0.45}{71.52-69.32}\approx -0.46\approx -0.5,$$

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{z}=0.45-(-0.46)\times 3.40\approx 2.0,$$

所以回归直线方程为: $\hat{y}=-0.5\ln x+2.0$6分

(2) 由题意有: $W=1200\times(-0.5\ln x+2.0)x$,8分

$$W'=1200(1.5-0.5\ln x), \text{ 令 } W'=0, \text{ 得 } \ln x=3, x=e^3\approx 20.1,$$

当 $0 < x < e^3$ 时, $W' > 0$, W 递增; 当 $x > e^3$ 时, $W' < 0$, W 递减;
 所以当售价约为 20.1 元/扎时, 日销售额 W 最大.10分

$$W_{\max}=1200\times(-0.5\times\ln e^3+2.0)\times e^3\approx 1200\times(-0.5\times 3+2.0)\times 20.1=12060 \text{ (元)},$$

所以, 最大日销售额为 12060 元.12分

21. 解: (1) 由题意, 得 $f'(x) = e^x - 2ax - 2a = e^x - 2a(x+1)$ ($x \in \mathbf{R}$) .
- 设 $g(x) = f'(x)$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 $g'(x) = e^x - 2a$.
- ①当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) = e^x - 2a > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.
- ②当 $a > 0$ 时, 由 $g'(x) = e^x - 2a = 0$, 得 $x = \ln(2a)$.
- 当 $x < \ln(2a)$ 时, $g'(x) < 0$, $f'(x)$ 在 $(-\infty, \ln(2a))$ 上单调递减;
- 当 $x > \ln(2a)$ 时, $g'(x) > 0$, $f'(x)$ 在 $(\ln(2a), +\infty)$ 上单调递增.4 分
- (2) 由于 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 即 $f'(x) = 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上有两解 x_1, x_2 ,
- $f'(x) = 0$ 即 $e^x - 2a(x+1) = 0$, 显然 $x \neq -1$, 故等价于 $\frac{e^x}{x+1} = 2a$ 有两解 x_1, x_2 ,
- 设 $h(x) = \frac{e^x}{x+1}$, 则 $h'(x) = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$,
- 当 $x < -1$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递减,
- 且 $h(x) < 0$, $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow -1$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$;
- 当 $-1 < x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减, 且 $x \rightarrow -1$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$;
- 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$,
- 所以 $h(0) = 1$ 是 $h(x)$ 的极小值, $\frac{e^x}{x+1} = 2a$ 有两解 x_1, x_2 等价于 $2a > 1$, 得 $a > \frac{1}{2}$6 分
- 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $-1 < x_1 < 0 < x_2$.
- 据 (1) $f'(x)$ 在 $(-\infty, \ln(2a))$ 上单调递减, 在 $(\ln(2a), +\infty)$ 上单调递增,
- 故 $x_1 < 0 < \ln(2a) < x_2$,
- 由于 $e^{x_1} = 2a(x_1 + 1)$, $e^{x_2} = 2a(x_2 + 1)$, 且 $-1 < x_1 < 0 < \ln(2a) < x_2$, 则 $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$,
- 所以 $x_1 = \ln(2a) + \ln(x_1 + 1)$, $x_2 = \ln(2a) + \ln(x_2 + 1)$,
- 即 $\ln(x_1 + 1) = x_1 - \ln(2a)$, $\ln(x_2 + 1) = x_2 - \ln(2a)$,
- 欲证明: $(x_1 + 1)(x_2 + 1) < 1$, 等价于证明: $\ln(x_1 + 1) + \ln(x_2 + 1) < 0$,
- 即证明: $x_1 + x_2 - 2\ln(2a) < 0$, 只要证明: $x_1 < 2\ln(2a) - x_2$,
- 因为 $f'(x)$ 在 $(-\infty, \ln(2a))$ 上单调递减, $x_1, 2\ln(2a) - x_2 \in (-\infty, \ln(2a))$,
- 所以只要证明: $f'(x_1) > f'(2\ln(2a) - x_2)$,
- 由于 $f'(x_1) = f'(x_2)$, 所以只要证明: $f'(x_2) > f'(2\ln(2a) - x_2)$,
- 即证明: $f'(x_2) - f'(2\ln(2a) - x_2) > 0$,10 分
- 设 $H(x) = f'(x) - f'(2\ln(2a) - x)$, 据 (1) $H(x) = g(x) - g(2\ln(2a) - x)$,
- $H'(x) = g'(x) + g'(2\ln(2a) - x) = e^x - 2a + e^{2\ln(2a)-x} - 2a$
- $$= e^x + \frac{4a^2}{e^x} - 4a \geq 2\sqrt{e^x \cdot \frac{4a^2}{e^x}} - 4a^2 = 0,$$
- 所以 $H(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,
- 所以 $H(x_2) > H(\ln(2a)) = f'(\ln(2a)) - f'(2\ln(2a) - \ln(2a)) = 0$,
- 即 $f'(x_2) - f'(2\ln(2a) - x_2) > 0$,
- 故 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) < 1$12 分

22. 解: (1) 曲线 C 化为: $\rho^2 + 2\rho^2 \sin^2 \theta = 6$,

将 $\begin{cases} y = \rho \sin \theta, \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \end{cases}$ 代入上式, 即 $x^2 + 3y^2 = 6$,

整理, 得曲线 C 的直角坐标方程 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

由 $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} = 0$, 得 $\frac{\sqrt{2}}{2} \rho \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sin \theta - \sqrt{2} = 0$,

将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$ 代入上式, 化简得 $x + y - 2 = 0$,

所以直线 l 的直角坐标方程 $x + y - 2 = 0$ 5 分

(2) 由(1)知, 点 $P(2, 0)$ 在直线 l 上, 可设直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \frac{3\pi}{4}, \\ y = t \sin \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

(t 为参数), 即 $\begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数),

代入曲线 C 的直角坐标方程, 得 $\frac{1}{2}t^2 - 2\sqrt{2}t + 4 + 3 \times \frac{1}{2}t^2 = 6$,

整理, 得 $t^2 - \sqrt{2}t - 1 = 0$,

所以 $\Delta = (\sqrt{2})^2 + 4 \times 1 = 6 > 0$, $t_1 t_2 = -1 < 0$,

由题意知, $\frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \left| \frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{-1} \right| = \left| \frac{\sqrt{6}}{1} \right| = \sqrt{6}$ 10 分

23. 解: (1) 法一:

$$f(x) = |x| - |2x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x < 0, \\ 3x - 2, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x + 2, & x > 1, \end{cases}$$

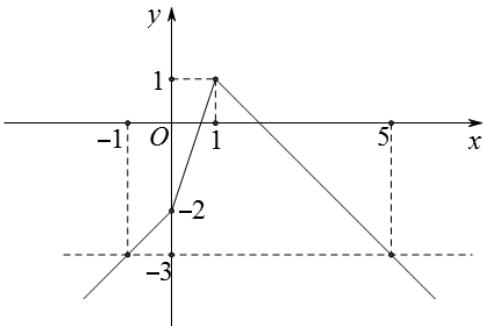
作出 $f(x)$ 的图象, 如图所示:

结合图象,

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增,

在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

又 $f(-1) = -3$, $f(5) = -3$,



所以不等式 $f(x) \geq -3$ 的解集是 $\{x | -1 \leq x \leq 5\}$ 5 分

法二: $f(x) = |x| - |2x - 2| \geq -3$,

等价于: $\begin{cases} x < 0, \\ -x + 2x - 2 \geq -3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 \leq x < 1, \\ x + 2x - 2 \geq -3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x - 2x + 2 \geq -3, \end{cases}$ 2 分

解得: $-1 \leq x < 0$ 或 $0 \leq x < 1$ 或 $x \geq 5$,

所以不等式 $f(x) \geq -3$ 的解集是 $\{x | -1 \leq x \leq 5\}$ 5 分

(2) 由 (1) 知函数 $f(x)$ 的最大值是 $f(1) = 1$, 所以 $f(x) \leq 1$ 恒成立.

因为 $|4a - 1| + \left| \frac{1}{a} + 1 \right| \geq \left| 4a - 1 + \frac{1}{a} + 1 \right| = \left| 4a + \frac{1}{a} \right| = \left| 4a \right| + \frac{1}{|a|} \geq 4$,

当且仅当 $a = \pm \frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

所以 $|4a - 1| + \left| \frac{1}{a} + 1 \right| \geq 4f(x)$ 10 分