云南师大附中2021届高考适应性月考卷（一）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	C	A	B	A	D	D	C	B	C

【解析】

1．M是数集，N是点集，故选C．

2．$\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，故选D．

3．随机变量$x\sim N(1,\ 4)$，正态曲线的对称轴$x=1$，所以$P(0<x<2)=0.6$，故选A．

4．$\cos 2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$，故选C．

5．$P=\dfrac{\pi\bullet 8^2+\pi\bullet 3^2}{(26+16)\bullet(16+10)}=\dfrac{73\pi}{1092}$，故选A．

6．双曲线右焦点$F(3,\ 0)$，即$c=3$，点F到一条渐近线的距离为b，即$b=1$，$\therefore a=\sqrt{c^2-b^2}=2\sqrt{2}$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，故选B．

7．由题意，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$．所以$|\overrightarrow{AD}|^2=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2$ $=\dfrac{37}{9}$，$|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{\sqrt{37}}{3}$，故选A．

8．由$q^2+q-6=0$，解得$q=2$（舍负），又由$\sqrt{a_m a_n}=4a_1$，得$m+n=6$，所以$\dfrac{1}{m}+\dfrac{9}{n}=$ $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{9}{n}\right)(m+n)\geqslant\dfrac{8}{3}$，当且仅当$m=\dfrac{3}{2}$，$n=\dfrac{9}{2}$时，等号成立，但是$m$，$n\in\mathbf{N}^*$，故$m=2$，$n=4$时，最小值为$\dfrac{11}{4}$，故选D．

9．由题意三视图对应的几何体如图1所示，所以几何体的体积为正方体的体积减去2个三棱锥的体积，即$V=2^3-2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times2=\dfrac{16}{3}$，故选D．

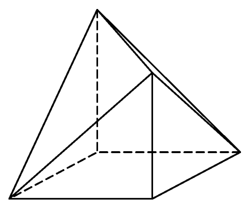

图1

10．$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cos x+x^2\mathrm{e}^x-x^2\mathrm{e}^{-x}+4}{\cos x+2}=2+\frac{x^2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{\cos x+2}$，令 $h(x)=\frac{x^2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{\cos x+2}$，则 $h(x)$ 为奇函数，所以 $h(x)$ 关于坐标原点对称，则 $f(x)$ 关于 $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$ 成中心对称，则有 $f(x)+f(1-x)=4$，所以 $f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2020}\right)=4038$，故选 C.

11．令 $F(x)=\mathrm{e}^x-\ln x$，则 $F'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$，则存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，使得 $F'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，所以 $F(x)$ 在 x_0 取得最小值，$F(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}+x_0$，在 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，所以有 $\frac{3\sqrt{2}}{2}<|PQ|_{\min}<\frac{5}{2}$，故选 B.

12．设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则过 A，B 的切线方程分别为 $yy_1=px+px_1$，$yy_2=px+px_2$，联立解得 $P\left(\frac{-p}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以 P 点必在抛物线的准线上，且 PM 平行于 x 轴，所以①⑤正确；两条切线的斜率 $k_1k_2=\frac{p}{y_1}\cdot\frac{p}{y_2}=-1$，所以 $AP\perp PB$，②正确；设 AB 的中点 M，则 PM 平行于 x 轴，则 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|PM||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{4p}+\frac{p}{2}\right)|y_1-y_2|\geqslant p^2$，当 $AB\perp x$ 轴时，取等号，所以③错误；$k_{PF}k_{AB}=\frac{y_1+y_2}{-2p}\cdot\frac{2p}{y_1+y_2}=-1$，所以 $PF\perp AB$，④正确，故选 C.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{2}{3}$	10206	2	6

【解析】

13．不等式组表示的可行域如图 2 所示，当 x，y 为直线 $x-y=0$ 与 $2x+y-1=0$ 的交点 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ 时，$z=x+y$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

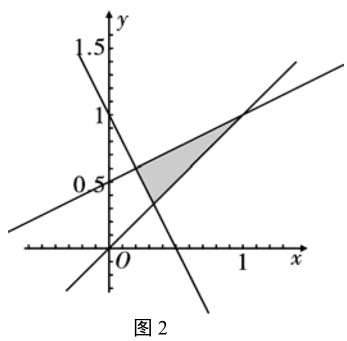

图 2

14．$\left(x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^9$的展开式的通项公式$T_{r+1}=\mathrm{C}_9^r3^rx^{9-\frac{3r}{2}}$，令$9-\frac{3r}{2}=3$，解得$r=4$，所以$x^3$的系数为 10206．

15．圆 C：$x^2+y^2+2x-3=0$ 的圆心为$(-1,0)$，四边形 $PACB$ 的面积$S=PA\bullet AC=\sqrt{PC^2-AC^2}\bullet AC=2\sqrt{PC^2-4}$，所以当 PC 最小时，四边形 $PACB$ 面积最小．代入点到直线的距离公式，$|PC|_{\min}=\sqrt{5}$，故四边形 $PACB$ 面积的最小值为 2．

16．如图3，由对称性知，球 O 的球心在中垂线 MN 上，设球 O 的半径为 R，在$\mathrm{Rt}\triangle O_2MN$中，由勾股定理可得$MN=2\sqrt{3}$在$\mathrm{Rt}\triangle O_1MO$中，由勾股定理可得$MO=\sqrt{OO_1^2-MO_1^2}=\sqrt{(R-2)^2-2^2}$，$NO=\sqrt{OO_4^2-NO_4^2}$$=\sqrt{(R-3)^2-3^2}$，由$MO+NO=MN$，联立解得$R=6$．

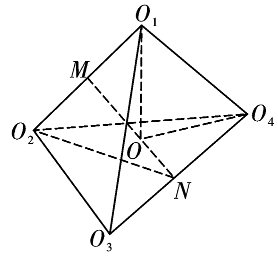

图 3

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）已知$(\sin A+\sin C)(\sin A-\sin C)=(\sin A-\sin B)\sin B$，

由正弦定理，$(a+c)(a-c)=(a-b)b$，

整理得$ab=a^2+b^2-c^2$，

由余弦定理：$\cos C=\frac{1}{2}$，又$0<C<\pi$，

所以$C=\frac{\pi}{3}$．　……………………………………………………………（4 分）

（2）已知$\sin C+\sin(C+2A)=\sin 2A$，

整理得$\sin(A+B)+\sin(\pi-B+A)=\sin 2A$，

$\sin(A+B)+\sin(B-A)=\sin 2A$，

即$2\sin B\cos A=2\sin A\cos A$．

①当$\cos A=0$时，$\triangle ABC$为直角三角形，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$；

②当$\cos A\neq 0$时，$\sin B=\sin A$，

所以$a=b$，$\triangle ABC$为等边三角形，$S_{\triangle ABC}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$．　……………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）x 的值为 $x=\dfrac{1-0.05-0.1-0.15-0.3}{20}=0.02$，

数学成绩在 90 分以上的人数：$20\times(0.4+0.15+0.05)=12$．

………………………………………………………………（4 分）

（2）把频率作为概率，从该市所有的中学生中任取一人，

成绩在 110 以上的概率 $P=0.15+0.05=0.2$，

所以从该市所有的中学生（人数很多）中随机选取 4 人，

所选 4 人中成绩在 110 以上的人数 $\xi\sim B(4,0.2)$，

随机变量 ξ 的取值可能为 0，1，2，3，4，

$P(\xi=0)=0.8^4=0.4096$，

$P(\xi=1)=C_4^1\times0.2\times0.8^3=0.4096$，

$P(\xi=2)=C_4^2\times0.2^2\times0.8^2=0.1536$，

$P(\xi=3)=C_4^3\times0.2^3\times0.8=0.0256$，

$P(\xi=4)=0.2^4=0.0016$，

随机变量 ξ 的分布列

ξ	0	1	2	3	4
P	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016

随机变量 ξ 数学期望 $E(\xi)=4\times0.2=0.8$．　　………………………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 4，

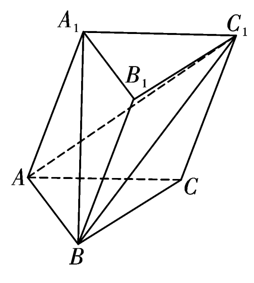

图 4

$\because A_1B\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore A_1B\perp AC$．

又$\because AB\perp AC$，$\because AB\cap A_1B=B$，

$\therefore AC\perp$ 平面A_1AB．

又$\because AC\subset$ 平面A_1ACC_1，

$\therefore$平面 $AA_1B\perp$ 平面 AA_1C_1C．　　…………………………………………（4 分）

（2）解：过点 A 作平面 ABC 的垂线作为 z 轴，AB 为 x 轴，AC 为 y 轴，建立如图 5 所示的空间直角坐标系，

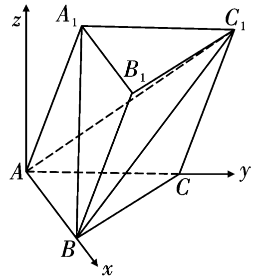

图 5

则 $A(0,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$，$A_1(1,\ 0,\ \sqrt{3})$，

$C_1(1,\ 1,\ \sqrt{3})$，

设平面 ACC_1 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，

则有 $\begin{cases} y_1=0, \\ x_1+y_1+\sqrt{3}z_1=0, \end{cases}$ 令 $z_1=1$，$\overrightarrow{n_1}=(-\sqrt{3},\ 0,\ 1)$，

设平面 ABC_1 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，

则有 $\begin{cases} x_2=0, \\ x_2+y_2+\sqrt{3}z_2=0, \end{cases}$ 令 $z_2=1$，$\overrightarrow{n_2}=(0,\ -\sqrt{3},\ 1)$，

向量 $\vec{n}_1$，$\vec{n}_2$ 所成角的余弦值：$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1}{4}$．

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

$\therefore$ 二面角 $B-AC_1-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$． ……………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

（1）解：由 $|PF_1|+|PF_2|=4$，得 $a=2$，

又 $P\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ 在椭圆上，

代入椭圆方程有 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$，解得 $b=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ……………………………………（4 分）

（2）证明：当直线 l 的斜率不存在时，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_1,\ -y_1)$，

$k_1+k_2=\dfrac{y_1-\dfrac{3}{2}-y_1-\dfrac{3}{2}}{x_1+1}=1$，解得 $x_1=-4$，不符合题意；

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程 $y=kx+m$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ 3x^2+4y^2-12=0, \end{cases}$ 整理得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$，$\Delta=4k^2-m^2+3>0$．

由 $k_1+k_2=1$，整理得 $(2k-1)x_1x_2+\left(k+m-\dfrac{5}{2}\right)(x_1+x_2)+2m-4=0$，

即 $(m-4k)(2m-2k-3)=0$．

当 $m=k+\dfrac{3}{2}$ 时，此时，直线 l 过 P 点，不符合题意；

当 $m=4k$ 时，$\Delta=4k^2-m^2+3>0$ 有解，此时直线 l：$y=k(x+4)$ 过定点 $(-4，0)$．

……………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x>0\}$，

$f'(x)=\dfrac{2x^2+(1-2a)x-a}{x}=\dfrac{(2x+1)(x-a)}{x}=0$，解得 $x_1=-\dfrac{1}{2}$（舍去），$x_2=a$．

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0，+\infty)$ 上恒成立，所以函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $a>0$ 时，在 $(0，a)$ 上 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

在 $(a，+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增．　　………………………………（4 分）

（2）证明：由（1）知，当 $a>0$ 时，在 $(0，a)$ 上 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

在 $(a，+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to0$ 时，$f(x)\to+\infty$，

而当 $a>2$ 时，$f(a)=a-a^2-a\ln a<0$，

所以函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有两个交点．

设 $A(x_1，0)$，$B(x_2，0)$，则有 $0<x_1<a<x_2$，

要证 $f'(x_0)>0$，只需证 $x_1+x_2>2a$，

设 $0<x<a$，令 $F(x)=f(x)-f(2a-x)$，

则有 $F(a)=0$，

$F'(x)=f'(x)+f'(2a-x)=\dfrac{-2(x-a)^2}{x(2a-x)}<0$，

$F(x)$ 在 $(0，a)$ 上单调递减，又 $F(a)=0$，

所以 $F(x)>0$，即 $f(x)>f(2a-x)$，

又 $0<x_1<a$，则有 $f(x_1)>f(2a-x_1)$，

而由已知 $f(x_1)=f(x_2)=0$，所以 $f(x_2)>f(2a-x_1)$.

又 $a<2a-x_1$，$a<x_2$，函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增，

所以 $x_2>2a-x_1$，即 $x_1+x_2>2a$，命题得证. ……………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）由曲线 C_1 的参数方程 $\begin{cases} x=1+\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \end{cases}$ (θ 为参数)，

消参得曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，

由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$ 得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=8\cos\theta$， ………………………………（5 分）

（2）$|PQ|=|\rho_1-\rho_2|=\dfrac{8\cos\theta}{\sin^2\theta}-2\cos\theta=\dfrac{13}{3}$，

点 C_1 到直线 $|PQ|$ 的距离 $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $S_{\triangle PQC_1}=\dfrac{1}{2}|PQ|d=\dfrac{13\sqrt{3}}{12}$. ……………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：（1）由绝对值不等式 $f(x)=|2x-1|-|2x+3|\leqslant|2x-1-2x-3|=4$，

所以 $m=4$. ……………………………………………………………………（5 分）

（2）由（1）知：$m=4$，即 $a+b+c=4$，所以 $a-1+b-1+c-1=1$，

由柯西不等式：

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}=\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}\right)(a-1+b-1+c-1)\geqslant(1+1+1)^2=9，$$

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{4}{3}$，等号成立. ……………………………………………（10 分）