云南师大附中2021届高考适应性月考卷（一）
文科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	C	A	B	A	A	D	B	C	C

【解析】

1．M是数集，N是点集，故选C.

2．$\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，故选D.

3．函数$f(x)$单调递增，由零点存在定理$f(1)=\mathrm{e}-5<0$，$f(2)=\mathrm{e}^2-3>0$，故选B.

4．$\cos 2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$，故选C.

5．$P=\dfrac{\pi\cdot 8^2+\pi\cdot 3^2}{(26+16)\cdot(16+10)}=\dfrac{73\pi}{1092}$，故选A.

6．双曲线右焦点$F(3,\ 0)$，即$c=3$，点F到一条渐近线的距离为b，即$b=1$，$\therefore a=\sqrt{c^2-b^2}=2\sqrt{2}$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，故选B.

7．由题意，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 所以$|\overrightarrow{AD}|^2=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\dfrac{37}{9}$，$|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{\sqrt{37}}{3}$，故选A.

8．由$q^2+q-6=0$，解得$q=2$（舍负），又由$\sqrt{a_m a_n}=4a_1$，得$m+n=6$，所以$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)(m+n)\geqslant\dfrac{2}{3}$，当且仅当$m=n=3$时，等号成立，故选A.

9．由题意三视图对应的几何体如图1所示，所以几何体的体积为正方体的体积减去2个三棱锥的体积，即$V=2^3-2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times2=\dfrac{16}{3}$，故选D.

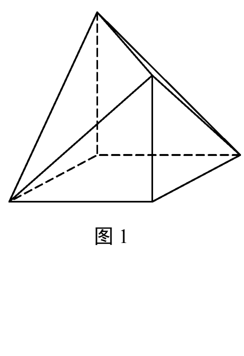

图1

10．令 $F(x)=\mathrm{e}^x-\ln x$，则 $F'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$，则存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，使得 $F'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，

所以 $F(x)$ 在 x_0 取得最小值，$F(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}+x_0$，在 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，所以

有 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<|PQ|_{\min}<\dfrac{5}{2}$，故选 B.

11．设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则过 A，B 的切线方程分别为 $yy_1=px+px_1$，$yy_2=px+px_2$，

联立解得 $P\left(\dfrac{-p}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，设 AB 的中点为 M，则 PM 平行于 x 轴，则 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|PM||y_1-y_2|=$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_1^2+y_2^2}{4p}+\dfrac{p}{2}\right)|y_1-y_2|\geqslant p^2$，故选 C.

12．$f(x)=\dfrac{\cos x+x^2\mathrm{e}^x-x^2\mathrm{e}^{-x}+2}{\cos x+2}=1+\dfrac{x^2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{\cos x+2}$，令 $h(x)=\dfrac{x^2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{\cos x+2}$，则 $h(x)$ 为奇函数，

所以 $h(x)$ 关于坐标原点对称，则 $f(x)$ 关于 $(0,1)$ 成中心对称，则有 $f(x)+f(-x)=2$，所以

$f\left(\dfrac{1}{2020}\right)+f\left(\dfrac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2019}{2020}\right)+f\left(-\dfrac{2019}{2020}\right)+f\left(-\dfrac{2018}{2020}\right)+\cdots+f\left(-\dfrac{1}{2020}\right)=4038$，

故选 C.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\dfrac{2}{3}$	$y=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$	2	$\sqrt{3}-1$

【解析】

13．不等式组表示的可行域如图 2 所示，当 x, y 为直线 $x-y=0$ 与 $2x+y-1=0$ 的交点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ 时，$z=x+y$ 的最小值为 $\dfrac{2}{3}$.

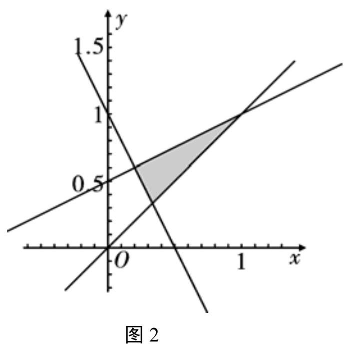

图 2

14．设切点坐标为 $(x_0,\ y_0)$，切线方程为 $y=kx$，则有 $y_0=\ln x_0$，$y_0=kx_0$，$k=\dfrac{1}{x_0}$，联立解得 $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$.

15．圆 C：$x^2+y^2+2x-3=0$ 的圆心为 $(-1,\ 0)$，四边形 $PACB$ 的面积 $S=PA\bullet AC=\sqrt{PC^2-AC^2}\bullet AC=2\sqrt{PC^2-4}$，所以当 PC 最小时，四边形 $PACB$ 面积最小．代入点到直线的距离公式，$|PC|_{\min}=\sqrt{5}$，故四边形 $PACB$ 面积的最小值为 2.

16．四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积 $S=2\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}+2\times\frac{1}{2}\times2\times4+4=12+4\sqrt{3}$，则有 $\frac{1}{3}\cdot S\cdot R=\frac{1}{3}\times4\times2\sqrt{3}$，解得 $R=\sqrt{3}-1$．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）已知 $(\sin A+\sin C)(\sin A-\sin C)=(\sin A-\sin B)\sin B$，

由正弦定理，$(a+c)(a-c)=(a-b)b$，

整理得 $ab=a^2+b^2-c^2$，

由余弦定理：$\cos C=\frac{1}{2}$，又 $0<C<\frac{\pi}{2}$，

所以 $C=\frac{\pi}{3}$．………………………………………………………………（4 分）

（2）已知 $\sin C+\sin(C+2A)=\sin 2A$，

整理得 $\sin(A+B)+\sin(\pi-B+A)=\sin 2A$，

$\sin(A+B)+\sin(B-A)=\sin 2A$，

即 $2\sin B\cos A=2\sin A\cos A$．

因为△ABC 为锐角三角形，所以 $\cos A\neq0$，

即 $\sin B=\sin A$，

所以 $a=b$，△ABC 为等边三角形，$S_{\triangle ABC}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$．

……………………………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）x 的值：$x=\frac{1-0.05-0.1-0.2-0.25}{20}=0.02$，

数学成绩在 110 分以上的人数：$20\times(0.2+0.1)=6$．

………………………………………………………………（4 分）

（2）由（1）知，数学成绩在 110 分以上的人数有 6 人，其中 $20\times(0.2+0.1)=6$，

其中成绩在 110~130 的有 4 人，记为 a_1，a_2，a_3，a_4，

成绩大于 130 的有 2 人，记为 b_1，b_2．

任取 2 人，共有 15 种取法，(a_1, b_1)，(a_1, b_2)，(a_2, b_1)，(a_2, b_2)，(a_3, b_1)，(a_3, b_2)，(a_4, b_1)，(a_4, b_2)，(a_1, a_2)，(a_1, a_3)，(a_1, a_4)，(a_2, a_3)，(a_2, a_4)，(a_3, a_4)，(b_1, b_2)，

恰好有 1 人的成绩大于 130 的取法共有 8 种取法，(a_1, b_1)，(a_1, b_2)，(a_2, b_1)，(a_2, b_2)，(a_3, b_1)，(a_3, b_2)，(a_4, b_1)，(a_4, b_2)，

所以恰好有 1 人的成绩大于 130 的概率 $P=\dfrac{8}{15}$. ……………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 3，$\because A_1B\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore A_1B\perp AC$.

又 $\because AB\perp AC$，$\because AB\cap A_1B=B$，

$\therefore AC\perp$ 平面 A_1AB.

又 $\because AC\subset$ 平面 A_1ACC_1，

$\therefore$ 平面 $AA_1B\perp$ 平面 AA_1C_1C. ………………………………………………（6 分）

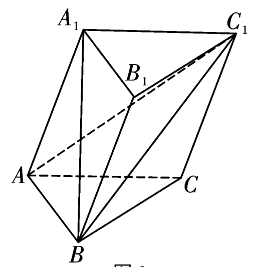

图 3

（2）解：$V_{B_1-A_1BC_1}=V_{B-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\bullet A_1B=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

………………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x>0\}$，

$$f'(x)=\frac{2x^2+(1-2a)x-a}{x}=\frac{(2x+1)(x-a)}{x}=0,$$

解得 $x_1=-\dfrac{1}{2}$ (舍去)，$x_2=a$.

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，所以函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $a>0$ 时，在 $(0, a)$ 上 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

在 $(a, +\infty)$ 上 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增. ………………………………（6 分）

（2）由（1）知，当 $a>0$ 时，在 $(0, a)$ 上 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

在 $(a, +\infty)$ 上 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，$f(x)_{\min}=f(a)=a^2+(1-2a)a-a\ln a$.

令 $h(a)=a^2+(1-2a)a-a\ln a$，则 $h'(a)=-2a-\ln a$，则 $h'(a)$ 单调递减，

而 $h'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}+\ln 3>0$，$h'\left(\frac{1}{2}\right)=-1+\ln 2<0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$，使得 $h'(x_0)=0$，所以 $h(a)$ 在 $\left(\frac{1}{3},\ x_0\right)$ 上单调递增，

在 $(x_0,\ +\infty)$ 上单调递减，

又 $h(1)=0$，$h\left(\frac{1}{3}\right)>0$，所以 $\frac{1}{3}<a\leqslant 1$．……………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）解：由 $|PF_1|+|PF_2|=4$，得 $a=2$，

又 $P\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上，

代入椭圆方程有 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，解得 $b=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．……………………………………………（4 分）

（2）证明：当直线 l 的斜率不存在时，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_1,\ -y_1)$，

$k_1+k_2=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}-y_1-\frac{3}{2}}{x_1+1}=1$，解得 $x_1=-4$，不符合题意；

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程 $y=kx+m$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ 3x^2+4y^2-12=0, \end{cases}$ 整理得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$，$\Delta=4k^2-m^2+3>0$．

由 $k_1+k_2=1$，整理得 $(2k-1)x_1x_2+\left(k+m-\frac{5}{2}\right)(x_1+x_2)+2m-4=0$，

即 $(m-4k)(2m-2k-3)=0$．

当 $m=k+\frac{3}{2}$ 时，此时，直线 l 过 P 点，不符合题意；

当 $m=4k$ 时，$\Delta=4k^2-m^2+3>0$ 有解，此时直线 l：$y=k(x+4)$ 过定点 $(-4,\ 0)$．

……………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）由曲线 C_1 的参数方程 $\begin{cases} x = 1+\cos\theta, \\ y = \sin\theta, \end{cases}$ (θ 为参数)，

消参得曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$，

由 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases}$ 得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$．

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta = 8\cos\theta$， ……………………………（5 分）

（2）$|PQ| = |\rho_1 - \rho_2| = \dfrac{8\cos\theta}{\sin^2\theta} - 2\cos\theta = \dfrac{13}{3}$，

点 C_1 到直线 $|PQ|$ 的距离 $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $S_{\triangle PQC_1} = \dfrac{1}{2}|PQ|d = \dfrac{13\sqrt{3}}{12}$． ……………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：（1）由绝对值不等式 $f(x) = |2x-1| - |2x+3| \leqslant |2x-1-2x-3| = 4$，

所以 $m = 4$． ……………………………（5 分）

（2）由（1）知：$m = 4$，即 $a+b+c = 4$，所以 $a-1+b-1+c-1 = 1$，

由柯西不等式：

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1} = \left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}\right)(a-1+b-1+c-1) \geqslant (1+1+1)^2 = 9,$$

当且仅当 $a = b = c = \dfrac{4}{3}$，等号成立． ……………………………（10 分）