昆八中高 2020-2021 学年度上学期月考一

特色高二数学试卷（理科）

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	D	D	B	C	C	B	B	B
题号	11	12								
答案	B	D								

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{7}{20}$

14. 2

15. $\frac{2}{5}$

16. $[9,+\infty)$

三、解答题：共 70 分.

17.（满分10分）

（1）由 $(0.004+a+0.022+0.028+0.022+0.018)\times 10=1$，

解得 $a=0.006$.……………………………………………………………………2 分

设该组数据的中位数为 x，

则 $(0.004+0.006+0.022)\times 10+0.028\times(x-70)=0.5$，………………………3 分

解得 $x\approx 76.4$，所以该组数据的中位数为 76.4 ……………………………………5 分

（2）由题中数据可得对食堂服务质量评分的平均分为

$\bar{x}=45\times 0.004\times 10+55\times 0.006\times 10+65\times 0.022\times 10$

$+75\times 0.028\times 10+85\times 0.022\times 10+95\times 0.018\times 10=76.2$，………………………8 分

因为 $76.2>75$，所以食堂不需要内部整顿. ……………………………………………10 分

18.（满分 12 分）

（1）由题意得：样本容量 $n=\frac{2}{0.008\times 10}=25$， $x=3\times 0.008=0.024$，

$y=0.1-0.008-0.016-0.024-0.04=0.012$；……………………………………………3 分

（2）由题意知：成绩在[80，90]内有 $25\times0.012\times10=3$ 人，设为 a，b，c，在[90，100]内有 2 人，设为 A，B,

从成绩在 80 分以上（含 80 分）的学生中随机抽取 2 名学生的基本事件共有 10 种，

所抽取的 2 名学生中至少有一人得分在[90，100]内的基本事件有：

$(a,A),(a,B),(b,A),(b,B),(c,A),(c,B),(A,B)$ 共 7 种，…………………………………5 分

所以所抽取的 2 名学生中至少有一人得分在[90，100]内的概率 $p=\dfrac{7}{10}$；…………7 分

（3）分数在[80，100]的学生共有 5 人，男生有 2 人，设 a，b，女生有 3 人，设为 c，d，e，

从该组抽取三人的基本事件共有 10 种，

至少有两名女生的基本事件有：

$(a,c,d),(a,c,e),(a,d,e),(b,c,d),(b,c,e),(b,d,e),(c,d,e)$，共 7 种，……………10 分

所以至少有两名女生的概率 $p=\dfrac{7}{10}$.……………………………………………………………… 12 分

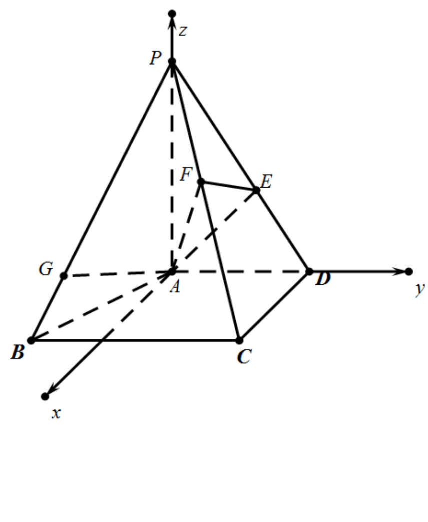
19.（满分 12 分）

(Ⅰ)由于 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，则 $PA\perp CD$，

由题意可知 $AD\perp CD$，且 $PA\cap AD=A$，

由线面垂直的判定定理可得 $CD\perp$ 平面 PAD. …………………………………………………3 分

(Ⅱ)以点 A 为坐标原点，平面 $ABCD$ 内与 AD 垂直的直线为 x 轴，AD,AP 方向为 y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，



易知：$A(0,0,0),P(0,0,2),C(2,2,0),D(0,2,0)$，……4 分

由$\overrightarrow{PF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$可得点 F 的坐标为 $F\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$，

由$\overrightarrow{PE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$可得 $E(0,1,1)$，

设平面 AEF 的法向量为：$\vec{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AF}=(x,y,z)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=(x,y,z)\cdot(0,1,1)=y+z=0\end{cases},$$

据此可得平面 AEF 的一个法向量为：$\vec{m}=(1,1,-1)$，…………………………………5 分

很明显平面 AEP 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$，…………………………………………… 6 分

$cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\times|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ………………………………………………………… 7 分

二面角 F-AE-P 的平面角为锐角，故二面角 F-AE-P 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.………………………8 分

(III)易知 $P(0,0,2), B(2,-1,0)$，由 $\overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$ 可得 $G\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，

则 $\overrightarrow{AG}=\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$,

注意到平面 AEF 的一个法向量为：$\vec{m}=(1,1,-1)$，…………………………………10 分

其 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{AG}=0$ 且点 A 在平面 AEF 内，故直线 AG 在平面 AEF 内. ………………12 分

20.（满分 12 分）

（1）在$\triangle ABC$中，由正弦定理可得：$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$

$\because$ $(c+b)(\sin C-\sin B)=(a-b)\sin A$,

$\therefore$ $(c+b)\left(\frac{c}{2R}-\frac{b}{2R}\right)=(a-b)\frac{a}{2R}$，整理得：$a^2+b^2-c^2=ab$，

由余弦定理得：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，$\therefore \angle C=\frac{\pi}{3}$ ………………………2 分

$\because$由$\triangle ABC$外接圆的半径为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$C=\frac{\pi}{3}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$

$\therefore c=4$,

$\because$若$\triangle ABC$的面积为 $4\sqrt{3}$，则 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=4\sqrt{3}$

$\therefore ab=16$ ……………………………………………………………………………………3 分

由余弦定理得：$16=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}$，整理得：$a^2+b^2=32$ ……………………4 分

$\therefore$ $\begin{cases} ab=16 \\ a^2+b^2=32 \end{cases}$,

解得：$a=b=4$. ……………………………………………………………………………6 分

（2）若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$C=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore A+B=\dfrac{2\pi}{3}$，又$\dfrac{a}{\sin A}=2R$

$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}-A$，$a=2R\sin A=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\sin A$

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{8}a+\sin B=\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)$……………………………8 分

因为$\triangle ABC$为锐角三角形，故$B=\dfrac{2\pi}{3}-A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \dfrac{\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore \sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}\right]$………………10 分

因此$\dfrac{\sqrt{3}}{8}a+\sin B$的取值范围是$\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}\right]$.…………………………………………… 12 分

21.（满分 12 分）

（1）由题意知$\overline{x}=10$，$\overline{y}=8$

所以$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=-3.2$，……………………………………………………3 分

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=40$，…………………………………………………………………4 分

所以$\hat{y}=-3.2x+40$.……………………………………………………………………5 分

（2）由（1）知，当$x=8$时，$y=-3.2\times 8+40=14.4$，因为$\left|14.4-14\right|=0.4<0.5$，所以可认为所得到的回归直线方程是理想的. ………………………………………… 8 分

（3）设该产品的单价为 x 元,依题意得，利润

$L=\left(x-2.5\right)\cdot\left(-3.2x+40\right)=-3.2x^2+48x-100$（$2.5<x<12.5$），…………10 分

所以当$x=-\dfrac{48}{2\times\left(-3.2\right)}=7.5$时，$L$ 取得最大值,故为获得最大利润，该产品的单价应定为 7.5 元. ……………………………………………………………………… 12 分

22．（满分 12 分）

（1）因为$4S_n=\left(a_n+1\right)^2$，且$a_n>0$，由$4a_1=\left(a_1+1\right)^2$得$a_1=1$，…………1 分

又$4S_{n+1}=\left(a_{n+1}+1\right)^2$，所以$4a_{n+1}=4S_{n+1}-4S_n=\left(a_{n+1}+1\right)^2-\left(a_n+1\right)^2$，

$\left(a_{n+1}+a_n\right)\left(a_{n+1}-a_n\right)-2\left(a_{n+1}+a_n\right)=0$，因为$a_n>0$，所以$a_{n+1}+a_n\neq 0$，

所以$a_{n+1}-a_n=2$，所以$\left\{a_n\right\}$是公差为 2 的等差数列，又$a_1=1$，………………2 分

所以$a_n=2n-1$. ……………………………………………………………………3 分

（2）设$\left\{b_n\right\}$的公比为q，因为$2b_7+b_8=b_9$，$2+q=q^2$，所以$q=-1$（舍）或$q=2$，

$b_1=1$，$b_n=2^{n-1}$. ……………………………………………………………………5 分

记$T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=1\times 1+3\times 2+5\times 2^2+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}$，

$2T_n=1\times 2+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n$，

$-T_n=1+2\left(2+2^2+\cdots+2^{n-1}\right)-(2n-1)\cdot 2^n$，

$T_n=(2n-1)\cdot 2^n-1-2\left(2+2^2+\cdots+2^{n-1}\right)=(2n-1)\cdot 2^n-1-2\left(2^n-2\right)=(2n-3)\cdot 2^n+3$

所以$T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(2n-3)\cdot 2^n+3$. ………………………………7 分

（3）不等式$\lambda\cdot(-1)^n<\frac{1}{2^{n+1}}\left(T_n+21\right)$可化为$(-1)^n\cdot\lambda<\left(n-\frac{3}{2}\right)+\frac{6}{2^{n-1}}$.

当n为偶数时，$\lambda<\left(n-\frac{3}{2}\right)+\frac{6}{2^{n-1}}$，记$g(n)=\left(n-\frac{3}{2}\right)+\frac{6}{2^{n-1}}$，所以$\lambda<[g(n)]_{\min}$.

$g(n+2)-g(n)=2+\frac{6}{2^{n+1}}-\frac{6}{2^{n-1}}=2-\frac{9}{2^n}$，

$n=2$时，$g(n+2)<g(n)$，$n\geqslant 4$时，$g(n+2)>g(n)$，

即$g(4)<g(2)$，$n\geqslant 4$时，$g(n)$递增，$[g(n)]_{\min}=g(4)=\frac{13}{4}$，即$\lambda<\frac{13}{4}$，……9 分

当n为奇数时，$\lambda>\left(\frac{3}{2}-n\right)-\frac{6}{2^{n-1}}$，记$h(n)=\frac{3}{2}-\left(n+\frac{6}{2^{n-1}}\right)$，所以$\lambda>[h(n)]_{\max}$.

$h(n+2)-h(n)=-2-\frac{6}{2^{n+1}}+\frac{6}{2^{n-1}}=-2+\frac{9}{2^n}$，

$n=1$时，$h(n+2)>h(n)$，$n\geqslant 3$时，$h(n+1)<h(n)$，

即$h(3)>h(1)$，$n\geqslant 3$时，$h(n)$递减，$[h(n)]_{\max}=h(3)=-3$，……………………11 分

所以$\lambda>-3$. 综上所述，实数λ的取值范围为$\left(-3,\dfrac{13}{4}\right)$……………………………12 分