

# 云贵州桂四省 2021 届高三联合考试 数学参考答案(理科)

1. D 【解析】本题考查集合的运算, 考查运算求解能力.

因为  $A = \{x | 0 < x + 2 < 5\} = \{x | -2 < x < 3\}$ ,  $B = \{x | x^2 \leq 4\} = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ,  
所以  $A \cap B = \{x | -2 < x \leq 2\}$ .

2. C 【解析】本题考查平面向量的坐标运算, 考查运算求解能力.

因为  $2m+n=(3\lambda+4, 4)$ ,  $m-n=(-1, -1)$ , 且  $(2m+n) \perp (m-n)$ , 所以  $(-1) \cdot (3\lambda+4) + 4 \times (-1) = 0$ , 解得  $\lambda = -\frac{8}{3}$ .

3. A 【解析】本题考查充分条件、必要条件, 考查逻辑推理能力.

由  $\lg a < \lg 3$ , 得到  $0 < a < 3$ , 因此, “ $1 < a < 3$ ”是“ $\lg a < \lg 3$ ”的充分不必要条件.

4. D 【解析】本题考查圆柱与圆锥的侧面积, 考查空间想象能力.

设圆锥的母线为  $l$ , 底面半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $\pi r l = 4\pi$ ,  $r=1$ , 所以  $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{15}$ .

圆柱体的侧面积为  $2\pi r \cdot 2h = 4\sqrt{15}\pi$ , 所以制作这样一个粮仓的用料面积为  $(4\sqrt{15} + 4)\pi$ .

5. B 【解析】本题考查等差数列的性质, 考查运算求解能力.

数列  $\{a_n + b_n + c_n\}$  是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以  $a_{2020} + b_{2020} + c_{2020} = 1 + 2019 \times 2 = 4039$ .

6. A 【解析】本题考查指数运算以及基本不等式, 考查运算求解能力.

由  $\sqrt[m]{4} \times \sqrt[n]{8} = 2$  可得  $\frac{2}{m} + \frac{3}{n} = 2$ , 所以  $\frac{2}{m} + \frac{3}{n} = 1$ ,  $3m + 2n = (3m + 2n)(\frac{2}{m} + \frac{3}{n}) = 6 + 6 + \frac{4n}{m} + \frac{9m}{n} \geqslant 12 + 2\sqrt{36} = 24$ , 当且仅当  $m=4, n=6$  时取等号.

7. D 【解析】本题考查函数的图象, 考查数形结合的数学思想.

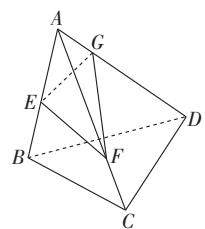
因为函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(-x) = [3(-x) - (-x)^3] \cdot \sin(-x) = (3x - x^3) \cdot \sin x = f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  为偶函数, 排除 B. 由  $f(x) = x(3 - x^2) \sin x$ , 可知当  $x \in (0, \sqrt{3})$  时,  $f(x) > 0$ ; 当  $x \in (\sqrt{3}, \pi)$  时,  $f(x) < 0$ . 故选 D.

8. C 【解析】本题考查三视图的应用, 考查空间想象能力.

选项 C 的侧视图、正视图、俯视图恰好对应木板上的三个孔洞, 故选 C.

9. C 【解析】本题考查四面体的体积, 考查空间想象能力.

如图, 设  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ , 点  $D$  到平面  $ABC$  的距离为  $h$ , 则  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} Sh$ , 且  $S_{\triangle AEF} = S \cdot \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5} S$ . 点  $G$  到平面  $ABC$  的距离为  $\frac{1}{4} h$ , 于是  $V_{AEFG} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} S \cdot \frac{1}{4} h = \frac{1}{30} Sh$ , 四面体  $ABCD$  被截面  $EFG$  分得的上下两部分的体积之比为  $\frac{1}{30} Sh : (\frac{1}{3} Sh - \frac{1}{30} Sh) = 1 : 9$ .



10. A 【解析】本题考查三角恒等变换, 考查运算求解能力.

$\because OA_1 = A_1 A_2 = 1$ , 且  $\triangle OA_1 A_2$  是直角三角形,  $\therefore OA_2 = \sqrt{2}$ , 同理得  $OA_6 = \sqrt{6}$ ,  $OA_7 = \sqrt{7}$ ,  $\therefore \sin \angle A_6 O A_8 = \sin(\angle A_6 O A_7 + \angle A_7 O A_8) = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \times \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{7\sqrt{2} + 2\sqrt{21}}{28}$ .

11. B 【解析】本题考查导数的应用, 考查逻辑推理能力.

由  $f(1-2x)=f(2x-1)$ , 可知  $f(x)$  为偶函数,

构造新函数  $g(x)=xf(x)$ , 则  $g'(x)=xf'(x)+f(x)$ , 当  $x>0$  时  $g'(x)>0$ .

所以  $g(x)=xf(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $f(2)=0$ , 即  $g(2)=0$ .

所以由  $g(x)=xf(x)>0$  可得  $x>2$ , 此时  $f(x)>0$ .

又  $f(x)$  为偶函数, 所以  $f(x)>0$  在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上的解集为  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ .

## 12. A 【解析】本题考查基本不等式的应用, 考查逻辑推理能力.

因为  $\frac{a^2+b^2+1+2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2+1}{a+b} = a+b + \frac{1}{a+b} \geq 2$ , 所以当且仅当  $a+b=1$ ,  $\sin C=1$  时,  $2\sin C \leq 2$ , 所以当且仅当  $a+b=1$ ,  $\sin C=1$  时,  $2\sin C \geq \frac{\pi}{8}$ . 又因为  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2$ , 所以  $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ , 则  $c^2 \geq \frac{1}{2}$ ,  $\triangle ABC$  外接圆的面积为  $\pi(\frac{c}{2})^2 \geq \frac{\pi}{8}$ .

## 13. $(-\infty, \sqrt{2})$ 【解析】本题考查函数的性质, 考查运算求解能力.

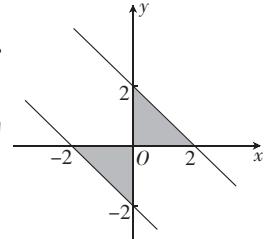
因为当  $x \in [0, 4]$  时,  $f(x)=x^2-2$ , 所以  $f(\sqrt{2})=0$ . 因为  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增, 所以关于  $x$  的不等式  $f(x)<0$  的解集为  $(-\infty, \sqrt{2})$ .

## 14. -1 【解析】本题考查数列的递推关系, 考查运算求解能力.

由题意知  $a_n=2S_n+1$ , 当  $n \geq 2$  时,  $a_{n-1}=2S_{n-1}+1$ , 两式相减, 得  $a_n-a_{n-1}=2a_n$ , 即  $a_n=-a_{n-1}$ , 当  $n=1$  时,  $a_1=-1$ , 所以数列  $\{a_n\}$  是首项为  $-1$ , 公比为  $-1$  的等比数列, 则  $a_5=(-1) \times (-1)^4=-1$ .

## 15. -8 【解析】本题考查线性规划的应用, 考查数形结合的数学思想.

作出不等式组表示的可行域, 如图, 当直线  $y=4x-z$  过点  $(-2, 0)$  时,  $z$  取得最小值, 且最小值为  $-8$ .



## 16. ①③ 【解析】本题考查等差数列与等比数列, 考查逻辑推理能力, 化归与转化的数学思想.

由  $\frac{1}{e^{a_3}+1} + \frac{1}{e^{a_{2019}}+1} \leq 1$ , 可得  $\frac{1}{e^{a_3}+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{a_{2019}}+1} - \frac{1}{2} \leq 0$ ,

易知  $f(x)=\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}$  是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 所以  $a_3+a_{2019} \geq 0$ ,

所以当数列  $\{a_n\}$  为等差数列时,  $S_{2021}=\frac{2021(a_3+a_{2019})}{2} \geq 0$ ;

当数列  $\{a_n\}$  为等比数列时, 且  $a_3, a_{1011}, a_{2019}$  同号, 所以  $a_3, a_{1011}, a_{2019}$  均大于零, 故  $T_{2021}=(a_{1011})^{2021}>0$ .  
故其中所有正确结论的编号是①③.

17. 解: (1) 设外接球的半径为  $R$ , 则  $4\pi R^2=5\pi$ , 解得  $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ . 1 分

设  $AA_1=x$ , 则  $x^2+1^2+1^2=(2R)^2=5$ , 解得  $x=\sqrt{3}$ , 3 分

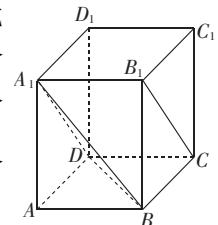
所以该长方体的表面积为  $2 \times (1 \times \sqrt{3} + 1 \times \sqrt{3} + 1 \times 1) = 4\sqrt{3} + 2$ . 5 分

(2) 连接  $A_1D, A_1B$ , 因为  $A_1D \parallel B_1C$ , 所以  $\angle A_1DB$  是异面直线  $BD$  与  $B_1C$  所成的角或补角, 7 分

又  $BD=\sqrt{2}, A_1B=2, A_1D=2$ , 8 分

所以在  $\triangle A_1BD$  中,  $\cos \angle A_1DB = \frac{2^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2 \times 2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . 9 分

即异面直线  $BD$  与  $B_1C$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . 10 分



评分细则：

- (1) 第一问共 5 分, 算出外接球半径得 1 分, 算出长方体的高得 2 分, 正确求出长方体的表面积得 2 分.  
(2) 第二问共 5 分, 说明  $\angle A_1DB$  是异面直线  $BD$  与  $B_1C$  所成的角或补角得 2 分, 未说明不得分, 利用余弦定理求出  $\cos \angle A_1DB$  得 2 分, 也可以利用等腰三角形的性质求出  $\cos \angle A_1DB$ , 算对得 2 分.  
(3) 其他方法按步骤酌情给分.

18. 解: (1) 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 又  $6a_2$  为  $a_3, a_4$  的等差中项,

$$\therefore 12a_2 = a_3 + a_4, \dots \quad 2 \text{ 分}$$

$$\therefore q^2 + q - 12 = 0, \dots \quad 4 \text{ 分}$$

$$\because q > 0, \therefore q = 3. \dots \quad 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由(1)可知 } a_n = 3^{n-1}, \dots \quad 6 \text{ 分}$$

$$\therefore b_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}. \dots \quad 8 \text{ 分}$$

$$\text{设 } \left\{\frac{1}{b_{n+1}}\right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } S_n, \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \dots \quad 10 \text{ 分}$$

$$\therefore S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}. \dots \quad 12 \text{ 分}$$

评分细则:

- (1) 第一问共 5 分, 根据等差中项性质得出关系式得 2 分, 利用通项公式得出  $q^2 + q - 12 = 0$  得 2 分, 算出  $q = 3$  得 1 分.

- (2) 第二问共 7 分, 算出  $\{a_n\}$  的通项公式得 1 分, 算出  $\{b_n\}$  的通项公式得 2 分, 算出  $\left\{\frac{1}{b_{n+1}}\right\}$  的前  $n$  项和得 4 分.

- (3) 其他方法按步骤酌情给分.

19. 解: (1) 因为  $\tan A + \tan(A + \frac{\pi}{4}) = 1$ , 所以  $\tan A + \frac{\tan A + 1}{1 - \tan A} = 1, \dots \quad 1 \text{ 分}$

$$\text{则 } \tan^2 A - 3\tan A = 0, \dots \quad 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \tan A = 3 (\tan A = 0 \text{ 舍去}). \dots \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \sin^2 A + \cos^2 A = 1, \text{ 所以 } \cos^2 A = \frac{1}{10}, \dots \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \tan A = 3 > 0, \text{ 所以 } \cos A > 0, \text{ 故 } \cos A = \frac{\sqrt{10}}{10}. \dots \quad 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A = \sqrt{10}, \dots \quad 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } bc = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 10, \dots \quad 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}bc \sin A = 5 \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{2}. \dots \quad 8 \text{ 分}$$

$$\text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \geqslant 2bc - \frac{\sqrt{10}}{5}bc = \frac{10 - \sqrt{10}}{5}bc = 20 - 2\sqrt{10}, \dots \quad 10 \text{ 分}$$

$$\text{当且仅当 } b=c \text{ 时, 等号成立, } \dots \quad 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a^2 \text{ 的最小值为 } 20 - 2\sqrt{10}. \dots \quad 12 \text{ 分}$$

20. (1) 证明: 由题意知,  $\triangle ACD, \triangle EBC$  都是等边三角形, 取  $AC$  的中点  $F, BC$  的中点  $G$ , 连接  $DF, FG, EG$ , 则  $DF \perp AC, EG \perp BC. \dots \quad 1 \text{ 分}$

又  $\because$  平面  $ACD \perp$  平面  $ABC$ , 平面  $ACD \cap$  平面  $ABC = AC, \therefore DF \perp$  平面  $ABC, \dots \quad 2 \text{ 分}$

同理  $EG \perp$  平面  $ABC, \therefore DF \parallel EG. \dots \quad 3 \text{ 分}$

又  $\because \triangle ACD, \triangle ECB, \triangle ACB$  都是等边三角形,  $\therefore DF = EG,$

∴四边形  $DFGE$  是平行四边形, ∴ $DE \parallel FG$ , ..... 4 分

∵ $DE \not\subset$ 平面  $ABC$ ,  $FG \subset$  平面  $ABC$ ,

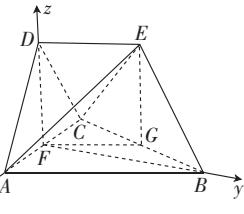
∴ $DE \parallel$  平面  $ABC$ . ..... 6 分

(2)解: 连接  $BF$ , 以  $F$  为原点建立如图所示的空间直角坐标系  $F-xyz$ ,

设  $AC=2$ , 则  $E(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, \sqrt{3}, 0)$ , ∴ $\overrightarrow{AB}=$

$(-1, \sqrt{3}, 0)$ ,  $\overrightarrow{BE}=(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ , ..... 7 分

平面  $ABC$  的一个法向量为  $\mathbf{n}_1=(0, 0, 1)$ . ..... 8 分



设平面  $ABE$  的一个法向量为  $\mathbf{n}_2=(x, y, z)$ ,

则  $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \end{cases}$  ∴ $\begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0, \\ -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$  ∴可取  $\mathbf{n}_2=(\sqrt{3}, 1, 1)$ . ..... 10 分

$\cos<\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2> = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 又由图知, 所求二面角的平面角是锐角, ∴二面角  $E-AB-C$  的余弦值

为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ . ..... 12 分

评分细则:

(1)第一问共 6 分, 证出  $DF \perp$  平面  $ABC$  得 2 分, 证出  $DE \parallel FG$  得 2 分, 证出  $DE \parallel$  平面  $ABC$  得 2 分. 未说明  $DE \not\subset$  平面  $ABC$  扣 1 分.

(2)第二问共 6 分, 建立空间直角坐标系, 并正确写出坐标得 1 分, 写出平面  $ABC$  的法向量得 1 分, 写出平面  $ABE$  的法向量得 2 分.

(3)其他方法按步骤酌情给分.

21. (1) 证明: ∵ $2a_n a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1} + 2 = 0$ , ∴ $2(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) + a_{n+1} - a_n = 0$ , ..... 1 分

∴ $2(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) + (a_{n+1} + 1) - (a_n + 1) = 0$ , ..... 2 分

∴ $\frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{a_n + 1} = 2$ , ..... 3 分

∴数列  $\{\frac{1}{a_n + 1}\}$  是首项为 1, 公差为 2 的等差数列. ..... 4 分

∴ $\frac{1}{a_n + 1} = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ , ∴ $a_n = \frac{1}{2n-1} - 1 = \frac{2-2n}{2n-1}$ . ..... 5 分

(2)解: 由题可知  $b_n = (2n-1) \times 2^n$ ,  $S_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-1) \times 2^n$ , ..... 6 分

$2S_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \dots + (2n-1) \times 2^{n+1}$ ,

两式相减得  $-S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + 2 \times 2^n - (2n-1) \times 2^{n+1}$ ,

∴ $S_n = 2^{n+1}(2n-3) + 6$ . ..... 8 分

∴ $(-1)^n \lambda < n \cdot 2^{n+2} + 6$ ,

若  $n$  为偶数, 则  $\lambda < n \cdot 2^{n+2} + 6$ , ∴ $\lambda < 38$ ; ..... 10 分

若  $n$  为奇数, 则  $-\lambda < n \cdot 2^{n+2} + 6$ , ∴ $-\lambda < 14$ , ∴ $\lambda > -14$ .

综上,  $-14 < \lambda < 38$ . ..... 12 分

评分细则:

(1)另解:

$$\frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{a_n + 1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1} + a_n + a_{n+1} + 1}, ..... 2 分$$

又因为  $2a_n a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1} + 2 = 0$ , 所以  $a_n a_{n+1} = \frac{-a_n - 3a_{n+1} - 2}{2}$ , ..... 3 分

代入可得  $\frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{a_n + 1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{\frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})} = 2$ . ..... 5 分

(2) 算出  $S_n$  得 3 分, 分  $n$  为奇数和偶数两种情况讨论, 每种情况各得 2 分.

(3) 其他方法按步骤酌情给分.

22. 解: (1) 当  $a=1$  时,  $f(x)=(e^x-1)\ln x$ , 所以  $f(1)=0$ . ..... 1 分

又  $f'(x)=e^x \ln x + \frac{e^x-1}{x}$ , 所以切线的斜率  $k=f'(1)=e-1$ ,

则切线方程为  $y=(e-1)(x-1)$ . ..... 2 分

该切线与  $x$  轴交于点  $A(1,0)$ , 与  $y$  轴交于点  $B(0,1-e)$ , ..... 3 分

所以围成的三角形的面积为  $\frac{1}{2} \times 1 \times (e-1) = \frac{e-1}{2}$ . ..... 4 分

(2) 显然  $x=1$  是方程  $f(x)=ax^2-ax$  的根, ..... 5 分

当  $x>0$  且  $x \neq 1$  时, 方程  $f(x)=ax^2-ax$  等价于  $\frac{e^{ax}-1}{ax}=\frac{x-1}{\ln x}$ , 则  $\frac{e^{ax}-1}{ax}=\frac{e^{\ln x}-1}{\ln x}$ . ..... 8 分

记  $g(x)=\frac{e^x-1}{x}$  ( $x>0$ ), 则  $g'(x)=\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$ ,

令  $h(x)=(x-1)e^x+1$  ( $x>0$ ), 则  $h'(x)=xe^x>0$ , 故  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

故  $h(x)>h(0)=0$ , 即  $g'(x)>0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又方程等价于  $g(ax)=g(\ln x)$ ,

故只需  $ax=\ln x$  在  $(1, +\infty)$  上有两个不同的根. ..... 10 分

$a=\frac{\ln x}{x}$ , 令  $k(x)=\frac{\ln x}{x}$ , 则  $k'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ,

当  $x \in (1, e)$  时,  $k'(x)>0$ ; 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $k'(x)<0$ .

所以  $k(x)$  在  $(1, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减,

故  $k(x)_{\max}=k(e)=\frac{1}{e}$ .

又  $k(1)=0$ , 可得  $a \in (0, \frac{1}{e})$ . ..... 12 分

评分细则:

(1) 第一问中, 求出切线方程得 2 分, 求出所求的面积得 2 分.

(2) 第二问中, 说明  $x=1$  是函数的零点得 1 分, 转化为  $\frac{e^{ax}-1}{ax}=\frac{e^{\ln x}-1}{\ln x}$  得 3 分, 得出  $ax=\ln x$  得 2 分, 求出  $a$  的范围得 2 分.

(3) 其他方法按步骤酌情给分.