

云贵川桂四省 2021 届高三联合考试 数学参考答案(文科)

1. D 【解析】本题考查集合的并集,考查运算求解能力.

由并集的概念可知 $M \cup N = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

2. C 【解析】本题考查平面向量的坐标运算,考查运算求解能力.

因为 $m \perp n$, 所以 $m \cdot n = \lambda + 2 + 2\lambda + 2 = 0$, 则 $\lambda = -\frac{4}{3}$.

3. A 【解析】本题考查充分条件、必要条件,考查逻辑推理能力.

由 $\lg a < \lg 3$, 得到 $0 < a < 3$, 因此, “ $1 < a < 3$ ”是“ $\lg a < \lg 3$ ”的充分不必要条件.

4. D 【解析】本题考查圆柱与圆锥的侧面积,考查空间想象能力.

设圆锥的母线为 l , 底面半径为 r , 高为 h , 则 $\pi r l = 4\pi$, $r = 1$, 所以 $h = \sqrt{4^2 - 1} = \sqrt{15}$.

圆柱体的侧面积为 $2\pi r \cdot 2h = 4\sqrt{15}\pi$, 所以制作这样一个粮仓的用料面积为 $(4\sqrt{15} + 4)\pi$.

5. B 【解析】本题考查等差数列的性质,考查运算求解能力.

数列 $\{a_n + b_n + c_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $a_{2020} + b_{2020} + c_{2020} = 1 + 2019 \times 2 = 4039$.

6. A 【解析】本题考查指数运算以及基本不等式,考查运算求解能力.

由 $4^m \times 8^n = 2$ 可得 $2^{2m+3n} = 2$, 所以 $2m+3n=1$, $\frac{3}{m} + \frac{2}{n} = (2m+3n) \left(\frac{3}{m} + \frac{2}{n} \right) = 6 + 6 + \frac{9m}{m} + \frac{4m}{n} \geq 12 + 2\sqrt{36} = 24$, 当且仅当 $3n=2m$ 时取等号.

7. D 【解析】本题考查函数的图象,考查数形结合的数学思想.

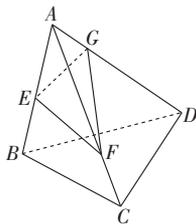
因为函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x) = [3(-x) - (-x)^3] \cdot \sin(-x) = (3x - x^3) \cdot \sin x = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数, 排除 B. 由 $f(x) = x(3-x^2)\sin x$, 可知当 $x \in (0, \sqrt{3})$ 时, $f(x) > 0$; 当 $x \in (\sqrt{3}, \pi)$ 时, $f(x) < 0$. 故选 D.

8. C 【解析】本题考查三视图的应用,考查空间想象能力.

选项 C 的侧视图、正视图、俯视图恰好对应木板上的三个孔洞, 故选 C.

9. C 【解析】本题考查四面体的体积,考查空间想象能力.

如图, 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 点 D 到平面 ABC 的距离为 h , 则 $V_{ABCD} = \frac{1}{3}Sh$, 且 $S_{\triangle AEF} = S \cdot \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}S$. 点 G 到平面 ABC 的距离为 $\frac{1}{4}h$, 于是 $V_{AEFG} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}S \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{30}Sh$, 四面体 $ABCD$ 被截面 EFG 分得的上下两部分的体积之比为 $\frac{1}{30}Sh : (\frac{1}{3}Sh - \frac{1}{30}Sh) = 1 : 9$.



10. A 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

$\because OA_1 = A_1A_2 = 1$, 且 $\triangle OA_1A_2$ 是直角三角形, $\therefore OA_2 = \sqrt{2}$, 同理得 $OA_6 = \sqrt{6}$, $OA_7 = \sqrt{7}$, $\therefore \sin \angle A_6OA_8 = \sin(\angle A_6OA_7 + \angle A_7OA_8) = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \times \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{7\sqrt{2} + 2\sqrt{21}}{28}$.

11. B 【解析】本题考查等差数列以及数列的最大项,考查运算求解能力.

因为 $a_3 + S_5 = 6a_3 = 18$, 所以 $a_3 = 3$. 又 $a_6 = 6$, 所以 $a_1 = 1, d = 1$, 则 $a_n = n, \frac{n}{n^2 + 56} = \frac{1}{n + \frac{56}{n}}$. 当 $n = 7$ 或 $n = 8$

时, 数列 $\{\frac{n}{n^2 + 56}\}$ 取得最大项, 且最大项为 $\frac{1}{15}$.

12. D 【解析】本题考查函数的性质,考查逻辑推理能力.

$\because f(x-1)$ 是奇函数, $\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称, 即 $f(-2-x)+f(x)=0$.
 又 $\because f(x+1)$ 为偶函数, $\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 即 $f(2-x)=f(x)$.
 $\therefore f(-2-x)+f(2-x)=0, \therefore f(x-2)+f(x+2)=0, \therefore f(x+8)=f(x)$,
 即函数 $y=f(x)$ 的周期为 8, $\therefore f(2018)=f(2)=f(0)=1, f(2019)=f(3)=f(-1)=0$,
 $f(2020)=f(4)=f(-2)=-f(0)=-1, f(2021)=f(5)=f(-3)=-f(1)=-2$,
 故 $f(2021)$ 最小.

13. $(-1, 0)$ 【解析】本题考查不等式性质,考查逻辑推理能力.

因为 $0 < x < y < 1$, 所以 $0 < x < 1, -1 < -y < 0$, 所以 $-1 < x-y < 1$, 又因为 $x-y < 0$, 所以 $x-y$ 的取值范围是 $(-1, 0)$.

14. 4 【解析】本题考查线性规划的应用,考查数形结合的数学思想.

画出可行域(图略)知,当直线 $y=4x-z$ 过点 $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ 时, $z_{\max}=4$.

15. -1 【解析】本题考查数列的递推关系,考查运算求解能力.

由题意知 $a_n=2S_n+1$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1}=2S_{n-1}+1$, 两式相减, 得 $a_n-a_{n-1}=2a_n$, 即 $a_n=-a_{n-1}$, 当 $n=1$ 时, $a_1=-1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 -1, 公比为 -1 的等比数列, 则 $a_5=(-1) \times (-1)^4=-1$.

16. $\frac{\pi}{8}$ 【解析】本题考查基本不等式的应用,考查逻辑推理能力.

因为 $\frac{a^2+b^2+1+2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2+1}{a+b} = a+b + \frac{1}{a+b} \geq 2, 2\sin C \leq 2$, 所以当且仅当 $a+b=1, \sin C=1$ 时, $2\sin C = \frac{a^2+b^2+1+2ab}{a+b}$. 又因为 $\frac{a^2+b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2$, 所以 $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$, 则 $c^2 \geq \frac{1}{2}$, $\triangle ABC$ 外接圆的面积为 $\pi(\frac{c}{2})^2 \geq \frac{\pi}{8}$.

17. 解:(1) 设外接球的半径为 R , 则 $4\pi R^2=5\pi$, 解得 $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 1分

设 $AA_1=x$, 则 $x^2+1^2+1^2=(2R)^2=5$, 解得 $x=\sqrt{3}$ 3分

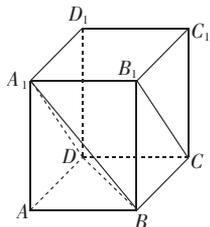
所以该长方体的表面积为 $2 \times (1 \times \sqrt{3} + 1 \times \sqrt{3} + 1 \times 1) = 4\sqrt{3} + 2$ 5分

(2) 连接 A_1D, A_1B , 因为 $A_1D \parallel B_1C$, 所以 $\angle A_1DB$ 是异面直线 BD 与 B_1C 所成的角或补角, 7分

又 $BD=\sqrt{2}, A_1B=2, A_1D=2$, 8分

所以在 $\triangle A_1BD$ 中, $\cos \angle A_1DB = \frac{2^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \times 2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 9分

即异面直线 BD 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 10分



评分细则:

(1) 第一问共 5 分, 算出外接球半径得 1 分, 算出长方体的高得 2 分, 正确求出长方体的表面积得 2 分.

(2) 第二问共 5 分, 说明 $\angle A_1DB$ 是异面直线 BD 与 B_1C 所成的角或补角得 2 分, 未说明不得分, 利用余弦定理求出 $\cos \angle A_1DB$ 得 2 分, 也可以利用等腰三角形的性质求出 $\cos \angle A_1DB$, 算对得 2 分.

(3) 其他方法按步骤酌情给分.

18. 解:(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 又 $6a_2$ 为 a_3, a_4 的等差中项,

$\therefore 12a_2 = a_3 + a_4$, 2分

$\therefore q^2 + q - 12 = 0$, 4分

$\because q > 0, \therefore q = 3$ 5分

(2) 由(1)可知 $a_n = 3^{n-1}$, 6分

$$\therefore b_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{设} \left\{ \frac{1}{b_{n+1}} \right\} \text{的前} n \text{项和为} S_n, \frac{1}{b_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\therefore S_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

评分细则:

(1) 第一问共 5 分, 根据等差中项性质得出关系式得 2 分, 利用通项公式得出 $q^2 + q - 12 = 0$ 得 2 分, 算出 $q = 3$ 得 1 分.

(2) 第二问共 7 分, 算出 $\{a_n\}$ 的通项公式得 1 分, 算出 $\{b_n\}$ 的通项公式得 2 分, 算出 $\left\{ \frac{1}{b_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和得 4 分.

(3) 其他方法按步骤酌情给分.

19. 解: (1) 由余弦定理可得 $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{2ac \cos B}{2ab \cos C} = \frac{c}{2a - c}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$

$$\text{则} \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{\sin B}{2 \sin A - \sin C}, \quad \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\text{即} 2 \sin A \cos B = \cos B \sin C + \sin B \cos C,$$

$$\text{所以} 2 \sin A \cos B = \sin(B + C) = \sin A. \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\text{又} A \in (0, \pi), \text{所以} \sin A \neq 0, \text{则} \cos B = \frac{1}{2}, \text{所以} B = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} abc, \text{则} b = 1. \quad \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\text{由余弦定理可知, } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \text{即} 1 = a^2 + c^2 - ac = (a + c)^2 - 3ac, \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{所以} 1 = a^2 + c^2 - ac \geq 2ac - ac, \text{则} ac \leq 1. \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\text{所以} (a + c)^2 = 3ac + 1 \leq 4, \text{即} a + c \leq 2,$$

$$\text{所以} \triangle ABC \text{周长的最大值为} 3. \quad \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

评分细则:

(1) 第一问求得 $B = \frac{\pi}{3}$ 或 $B = 60^\circ$ 都得 5 分.

(2) 第二问共 7 分, 得出 $b = 1$ 得 2 分, 另解:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$a + b + c = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} (\sin A + \sin C) = 2 \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right) + 1, \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\text{当} A = \frac{\pi}{3} \text{时, } a + b + c \text{取得最大值} 3, \text{即} \triangle ABC \text{周长的最大值为} 3. \quad \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

20. (1) 证明: $\because 2a_n a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1} + 2 = 0, \therefore 2(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) + a_{n+1} - a_n = 0, \quad \dots\dots\dots 1 \text{分}$

$$\therefore 2(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) + (a_{n+1} + 1) - (a_n + 1) = 0, \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{a_n + 1} = 2, \quad \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\therefore \text{数列} \left\{ \frac{1}{a_n + 1} \right\} \text{是首项为} 1, \text{公差为} 2 \text{的等差数列}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n + 1} = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1, \therefore a_n = \frac{1}{2n - 1} - 1 = \frac{2 - 2n}{2n - 1}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$(2) \text{解: 由题可知} b_n = (2n - 1) \times 2^n,$$

$$S_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n - 1) \times 2^n, \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$2S_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \cdots + (2n - 1) \times 2^{n+1},$$

两式相减得 $-S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + 2 \times 2^n - (2n-1) \times 2^{n+1}$,

$\therefore S_n = 2^{n+1}(2n-3) + 6, \dots \dots \dots$ 8分

$\therefore \lambda < n \cdot 2^{n+2} + 6. \dots \dots \dots$ 9分

令 $c_n = n \cdot 2^{n+2} + 6, c_{n+1} - c_n = n \cdot 2^{n+2} - (n-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1}(n+1) > 0$, 所以数列 $\{n \cdot 2^{n+2} + 6\}$ 单调递增, $\dots \dots \dots$ 11分

所以 $\lambda < 14. \dots \dots \dots$ 12分

评分细则:

(1) 另解: $\frac{1}{a_{n+1}+1} - \frac{1}{a_n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1} + a_n + a_{n+1} + 1}, \dots \dots \dots$ 2分

又因为 $2a_n a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1} + 2 = 0$, 所以 $a_n a_{n+1} = \frac{-a_n - 3a_{n+1} - 2}{2}, \dots \dots \dots$ 3分

代入可得 $\frac{1}{a_{n+1}+1} - \frac{1}{a_n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{\frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})} = 2. \dots \dots \dots$ 5分

(2) 算出 S_n 得 3分, 未说明数列 $\{n \cdot 2^{n+2} + 6\}$ 的单调性, 直接得出答案扣 2分.

(3) 其他方法按步骤酌情给分.

21. (1) 证明: 由题意知, $\triangle ACD, \triangle EBC$ 都是等边三角形, 取 AC 的中点 F, BC 的中点 G , 连接 DF, FG, EG , 则 $DF \perp AC, EG \perp BC. \dots \dots \dots$ 1分

又 \because 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC , 平面 $ACD \cap$ 平面 $ABC = AC, \therefore DF \perp$ 平面 $ABC, \dots \dots \dots$ 2分

同理 $EG \perp$ 平面 $ABC, \therefore DF \parallel EG. \dots \dots \dots$ 3分

又因为 $\triangle ACD, \triangle ECB, \triangle ACB$ 都是等边三角形, $\therefore DF = EG,$

\therefore 四边形 $DFGE$ 是平行四边形, $\therefore DE \parallel FG. \dots \dots \dots$ 4分

$\because DE \not\subset$ 平面 $ABC, FG \subset$ 平面 $ABC,$

$\therefore DE \parallel$ 平面 $ABC. \dots \dots \dots$ 6分

(2) 解: 分别取 M, N 为 DE, AB 的中点, 连接 $CM, MN, CN.$

$\because CD = CE, AC = CB, \therefore CM \perp ED, CN \perp AB,$

由(1)可知 $DE = 2$, 且 $ED \parallel AB$, 所以 $CM \perp AB,$

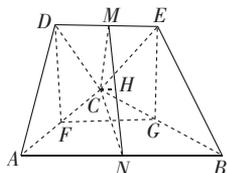
又 $\because CM \cap CN = C, \therefore AB \perp$ 平面 $CMN. \dots \dots \dots$ 7分

过点 C 作 $CH \perp MN$, 交 MN 于点 $H, \therefore AB \perp CH.$

又 $\because AB \cap MN = N, \therefore CH \perp$ 平面 $ABED$, 故 CH 为四棱锥 $C-ABED$ 的高. $\dots \dots \dots$ 9分

$CM = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}, CN = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}, MN = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}. \dots \dots \dots$ 10分

在 $\triangle FCG$ 中, $\frac{1}{2} \times \sqrt{15} \cdot CH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{15-3}$, 得 $CH = \frac{4\sqrt{15}}{5}, \therefore$ 四棱锥 $C-ABED$ 的高为 $\frac{4\sqrt{15}}{5}.$



$\dots \dots \dots$ 12分

评分细则:

(1) 第一问共 6分, 证出 $DF \perp$ 平面 ABC 得 2分, 证出 $DE \parallel FG$ 得 2分, 证出 $DE \parallel$ 平面 ABC 得 2分. 未说明 $DE \not\subset$ 平面 ABC 扣 1分.

(2) 第二问另解: 设四棱锥 $C-ABED$ 的高为 h, h 即点 C 到平面 $ABED$ 的距离, 求得 $V_{D-ACB} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ACB} \cdot DF = 8$, 累积得 8分; 求得 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{4^2 - 1^2} = 2\sqrt{15}$, 累积得 10分; 由 $V_{D-ACB} = V_{C-ABD}$, 得到 $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{15}h = 8$, 解得 $h = \frac{4\sqrt{15}}{5}$, 累积得 12分.

(3) 其他方法按步骤酌情给分.

22. 解: (1) 当 $m=1$ 时, $f(x) = x^2 + 2e^x$, 所以 $f(0) = 2. \dots \dots \dots$ 1分

又 $f'(x) = 2x + 2e^x$, 所以切线的斜率 $k = f'(0) = 2, \dots \dots \dots$ 2分

则切线方程为 $y-2=2(x-0)$, 即 $y=2x+2$ 3分

该切线与 x 轴交于点 $A(-1,0)$, 与 y 轴交于点 $B(0,2)$, 4分

所以围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ 5分

(2) 由 $x^2 f(x) = (1+2m)e^{2x}$, 即 $x^4 + 2mx^2 e^x - (1+2m)e^{2x} = 0$, 得 $\frac{x^4}{e^{2x}} + \frac{2mx^2}{e^x} - 2m - 1 = 0$.

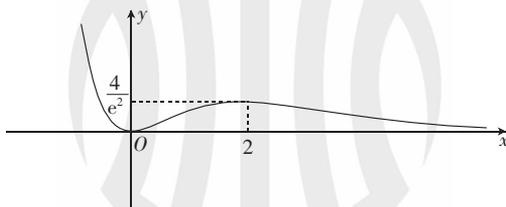
令 $t = \frac{x^2}{e^x}$, 可得 $t^2 + 2mt - 2m - 1 = 0$ 7分

令 $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x}$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x=0$ 或 2 .

列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	单调递减	极小值 0	单调递增	极大值 $\frac{4}{e^2}$	单调递减

函数 $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ 的图象如下图所示:



..... 9分

由于 $x^4 + 2mx^2 e^x - (1+2m)e^{2x} = 0$ 有四个不同的解, 而关于 t 的二次方程 $t^2 + 2mt - 1 - 2m = (t-1)(t+2m+1) = 0$, 解得 $t_1 = 1, t_2 = -2m - 1$ 10分

所以 $0 < -2m - 1 < \frac{4}{e^2}$, 得 $-\frac{2}{e^2} - \frac{1}{2} < m < -\frac{1}{2}$ 12分

评分细则:

(1) 第一问中, 求出切线方程得 3 分, 求出所求的面积得 2 分.

(2) 第二问中, 转化为 $t^2 + 2mt - 2m - 1 = 0$ 得 2 分, 得出 $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ 的单调性得 2 分, 未画出图象不扣分.

(3) 其他方法按步骤酌情给分.