

理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	A	C	B	C	B	C	B	C	A	D

【解析】

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \cap B$ 中含有两个元素, 故选 D.

2. $z = 5 + 12i$, $|z| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, 故选 A.

3. 等比数列 $\{a_n\}$, 且 $a_4 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_5$, $\frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_6}{a_5} = q^2 = 1$, 所以公比为 ± 1 , 故选 A.

4. $f(0) + f(1) = \sin 0 + \ln 1 = 0$, 故选 C.

5. 由题可知 $E = V + F - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$, 故选 B.

6. $a = \sqrt{2}b$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3b^2} = \sqrt{3}b$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故选 C.

7. 由于 $x - y + 2 < 0$ 取不到该直线上的点, 所以目标函数既无最大值也无最小值, 故选 B.

8. 正项数列 $\{a_n\}$, $a_n^2 = 2S_n - n$, 当 $n=1$ 时, $a_1^2 = 2S_1 - 1 = 2a_1 - 1$, $a_1^2 - 2a_1 + 1 = (a_1 - 1)^2 = 0$, 所以 $a_1 = 1$. 当 $n \geq 2$ 时, $a_n^2 - a_{n-1}^2 = 2S_n - 2S_{n-1} - 1 = 2a_n - 1$, $a_{n-1}^2 = a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2$, 所以 $a_{n-1} = a_n - 1$ 或者 $a_{n-1} = 1 - a_n$. 当 $a_{n-1} = a_n - 1$ 时, $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $a_n = n$, $a_5 = 5$; 当 $a_{n-1} = 1 - a_n$ 时, $a_2 = 0$ 与 $\{a_n\}$ 是正项数列矛盾, 所以舍去, 故选 C.

9. 由三视图可得, 该几何体为圆台, 可求其母线长为 $\sqrt{10}$, 上下底面半径分别为 $r=1$ 和 $R=2$, 由圆台表面积公式可得 $S = \pi(rl + Rl + r^2 + R^2) = (3\sqrt{10} + 5)\pi$, 故选 B.

10. 设内切圆圆心为 O_1 , $AC = BC = 3$, $AB = 2$, 由等面积法可得内切圆半径 $r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB| + |BC| + |CA|}$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad O_1 \left(2, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad OO_1 = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \text{故选 C.}$$

11. 两个点可以连一条弦，将圆分为两部分，加一个点，多两条弦，将圆多分出来两部分，所以每加一条弦可以按这种方式多出一个区域，再加一个点，变成了一对相交弦和四条其他的弦，共分为 8 个区域，所以除去前一种方式增加的区域数，一对相交弦还会多产生一个区域，故当点数多于 4 个时，最多可分得总的区域数为 $1 + C_n^2 + C_n^4$ ，此题 $n=6$ ，所以最多可分为 31 个区域，故选 A.

$$12. \text{ 令 } \begin{cases} b+3c=x, \\ a+b=y, \\ a+2c=z, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{-2x+2y+3z}{5}, \\ b=\frac{2x+3y-3z}{5}, \\ c=\frac{x-y+z}{5}, \end{cases}$$

$$+\frac{x-4y+4z}{y}+\frac{2x+2y-3z}{z}, \quad \frac{-x+y+4z}{x}+\frac{x-4y+4z}{y}+\frac{2x+2y-3z}{z}=-8+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{4z}{x}+\frac{2x}{z}+\frac{4z}{y}+\frac{2y}{z} \geq 8\sqrt{2}-6, \text{ 当且仅当 } x=y=\sqrt{2}z \text{ 时取到最小值, 故选 D.}$$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{1}{4}$	6	17π	$\frac{7}{6}$

【解析】

13. $f(x) = ax^3 - 3x$, $f'(x) = 3ax^2 - 3$, $f'(2) = 12a - 3 = 0$, 故 $a = \frac{1}{4}$, 经验证当 $a = \frac{1}{4}$ 时, $x=2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.
14. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 6 \cos \theta$, 所以 $(\vec{a} \cdot \vec{b})_{\max} = 6$.
15. 两个圆的面积和 $S = \pi \left(\frac{|AC|}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{|BD|}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} (|AC|^2 + |BD|^2)$, 由余弦定理可得 $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos B = 34 - 30\cos B$, $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB||AD|\cos A = 34 - 30\cos A = 34 + 30\cos B$, 故 $S = 17\pi$.
16. 设 $A(2, -1)$, $B(0, -1)$, $C(0, 1)$, $D(2, 1)$, 折到的点为 E , 折痕与 y 轴的交点为 F , F 关于直线 CE 对称的点为 G , G 在抛物线 $x^2 = 4y$ 上, 又在折痕上, 可证折痕为该抛物线的切线, 故折痕围成的区域一块为等腰直角三角形, 一块为抛物线, 正方形和 x 轴围成的曲边图形, 故总面积 $= \frac{1}{2} + \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \frac{7}{6}$.

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

解：（1）由余弦定理可得 $2ab \cos C + 2ac \cos B + 2bc \cos A$

$$= a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2 + b^2 + c^2 - a^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

所以可得 $b^2 = 4$.

由于 $b > 0$ ，所以 $b = 2$（6 分）

（2）已知 $a \cos A = b \cos B$ ，由正弦定理可得 $\sin A \cos A = \sin B \cos B$ ，

由正弦二倍角公式可得 $\sin 2A = \sin 2B$ ，

$$\because 2A \in (0, 2\pi), 2B \in (0, 2\pi), A + B \in (0, \pi), 2A + 2B \in (0, 2\pi),$$

所以 $2A = 2B$ 或者 $2A + 2B = \pi$ ，

$$\text{当 } 2A = 2B \text{ 时, } A = B, a = b = 2, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{8},$$

$$\sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{4};$$

$$\text{当 } 2A + 2B = \pi \text{ 时, } A + B = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{2}, a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \sqrt{5}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）设比赛在第 4 局结束的概率为 P ，

$$P = C_3^2(0.7)^2 \times 0.3 \times 0.7 + C_3^2(0.3)^2 \times 0.7 \times 0.3 = 0.3654.$$

.....（6 分）

（2）设比赛在第 4 局结束为事件 A ，甲获胜为事件 B ，

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{C_3^2(0.7)^2 \times 0.3 \times 0.7}{0.3654} = \frac{49}{58}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：由于 $BE = CD$ ， $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $DE \perp AB$ ，

所以 $DE \perp EB$ ， $DE \perp EF$ ， $EB \cap EF = E$ ，

所以 $DE \perp$ 平面 FEB（6 分）

(2) 解: 如图, 过点 E 作 $EG \perp BE$ 交 BF 于点 G ,

$$EG \perp EB, EG \perp DE, EB \cap DE = E,$$

所以 $EG \perp$ 平面 $BCDE$.

分别以 ED, EB, EG 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

$$E(0, 0, 0), B(0, 2, 0), C(2, 2, 0), D(2, 0, 0),$$

$$F(0, -1, \sqrt{3}), \overrightarrow{FE} = (0, 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{FD} = (2, 1, -\sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{FB} = (0, 3, -\sqrt{3}), \overrightarrow{FC} = (2, 3, -\sqrt{3}).$$

设平面 FED 的法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{FE} \cdot \vec{m} = 0, \\ \overrightarrow{FD} \cdot \vec{m} = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \vec{m} = (0, \sqrt{3}, 1).$$

设平面 FBC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{FB} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{FC} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \vec{n} = (0, 1, \sqrt{3}),$$

平面 FDE 与平面 FBC 所成的锐二面角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

..... (12 分)

20. (本小题满分 12 分)

(1) 解: 当过 F 的直线斜率不存在时, 此时弦长为 $2p$;

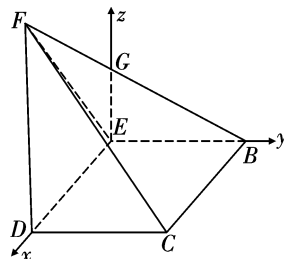
当过 F 的直线斜率存在时, 设直线方程为 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = k\left(x - \frac{p}{2}\right), \end{cases} \text{ 可得 } k^2 x^2 - p(k^2 + 2)x + \frac{p^2 k^2}{4} = 0,$$

$$\text{弦长} = x_1 + x_2 + p = \frac{p(k^2 + 2)}{k^2} + p = 2p + \frac{2p}{k^2} > 2p,$$

所以弦长最短 $= 2p = 4$, 所以 $p = 2$.

..... (5 分)





(2) 证明: 设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$,

设过 A 点且与抛物线相切的直线 l_{AQ} : $y = k'\left(x - \frac{y_1^2}{4}\right) + y_1$,

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = k'\left(x - \frac{y_1^2}{4}\right) + y_1, \end{cases} \text{ 可得 } \frac{k'}{4}y^2 - y - \frac{k'y_1^2}{4} + y_1 = 0,$$

$$\Delta = 1 - k'\left(y_1 - \frac{k'y_1^2}{4}\right) = 0, \text{ 解得 } k'y_1 = 2,$$

可得 l_{AQ} : $y_1y = 2x + \frac{y_1^2}{2}$, 同理可得 l_{BQ} : $y_2y = 2x + \frac{y_2^2}{2}$,

联立得 $Q\left(\frac{y_1y_2}{4}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$,

$$|AF| \cdot |BF| = \left(\frac{y_1^2}{4} + 1\right) \left(\frac{y_2^2}{4} + 1\right),$$

$$|QF|^2 = \left(\frac{y_1y_2}{4} - 1\right)^2 + \frac{(y_1 + y_2)^2}{4} = \frac{y_1^2y_2^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} + 1 = \left(\frac{y_1^2}{4} + 1\right) \left(\frac{y_2^2}{4} + 1\right),$$

所以 $|QF|^2 = |AF| \cdot |BF|$.

..... (12 分)

21. (本小题满分 12 分)

(1) 解: $f'(x) = ae^x$, $f'(0) = a = 1$, $f(0) = a + b = 1$,

解得 $a = 1$, $b = 0$.

..... (4 分)

(2) 证明: 令 $g(x) = e^x - x - 1$,

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$, $g(x)$ 单调递增, $g(x)_{\min} = g(0) = 0$, 得 $e^x \geq x + 1$,

故只需证 $\cos x + \tan x \leq x + 1$,

令 $h(x) = \cos x + \tan x - x - 1$,

$$h'(x) = -\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin x(\sin x - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x(\sin x + \sin^2 x - 1)}{\cos^2 x}.$$



由于 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 令 $F(x) = \sin x + \sin^2 x - 1$, 单调递增, $F(0) < 0$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$,

故存在 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 使得 $F(x_0) = 0$.

当 $x \in [0, x_0]$ 时, $F(x) < 0$, $h'(x) \leq 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $F(x) > 0$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

$$h(0) = 0, \quad h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0, \quad h(x)_{\max} = h(0) = 0,$$

故 $\cos x + \tan x \leq x + 1 \leq e^x$.

..... (12 分)

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

解: (1) 由 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$,

$$A\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x_A = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad y_A = \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{3}, \quad A(0, \sqrt{3}),$$

$$B(1, \pi), \quad x_B = 1 \cdot \cos \pi = -1, \quad y_B = 1 \cdot \sin \pi = 0, \quad B(-1, 0),$$

$$C(1, 0), \quad x_C = 1 \cdot \cos 0 = 1, \quad y_C = 1 \cdot \sin 0 = 0, \quad C(1, 0).$$

..... (5 分)

(2) $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 故外接圆圆心坐标为 $O_1\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

$$\text{外接圆半径为 } r = \frac{2}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以外接圆的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \alpha, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \alpha, \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数}),$$

$$\text{所以 } |MA|^2 = \frac{4 \cos^2 \alpha}{3} + \frac{4 \sin^2 \alpha}{3} - \frac{8 \sin \alpha}{3} + \frac{4}{3},$$

$$|MB|^2 = \frac{4 \cos^2 \alpha}{3} + \frac{4\sqrt{3} \cos \alpha}{3} + 1 + \frac{4 \sin^2 \alpha}{3} + \frac{4 \sin \alpha}{3} + \frac{1}{3},$$



$$|MC|^2 = \frac{4\cos^2 \alpha}{3} - \frac{4\sqrt{3}\cos \alpha}{3} + 1 + \frac{4\sin^2 \alpha}{3} + \frac{4\sin \alpha}{3} + \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } |MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 8.$$

..... (10 分)

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

解: (1) 已知 $2x + 2y = xy + 4$, 可得 $(x-2)(y-2) = 0$.

由于 $y > 2$, 所以可得 $x = 2$.

..... (5 分)

(2) 由题可得 $(x-2)(y-2) = 4$,

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1 = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 7 \geq 2(x-2)(y-2) - 7 = 1,$$

当且仅当 $x-2 = y-2 = \pm 2$ 时取等号,

故 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1$ 的最小值为 1.

..... (10 分)