

文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	A	C	B	C	B	A	C	B	C	D

【解析】

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \cap B$ 中含有两个元素, 故选 D.

2. $z = 5 + 12i$, $|z| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, 故选 A.

3. 等比数列 $\{a_n\}$, 且 $a_4 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_5$, $\frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_6}{a_5} = q^2 = 1$, 所以公比为 ± 1 , 故选 A.

4. $f(0) + f(1) = \sin 0 + \ln 1 = 0$, 故选 C.

5. 由题可知 $E = V + F - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$, 故选 B.

6. $a = \sqrt{2}b$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3b^2} = \sqrt{3}b$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故选 C.

7. 由于 $x - y + 2 < 0$ 取不到该直线上的点, 所以目标函数既无最大值也无最小值, 故选 B.

8. $A_1(1, 0)$, $A_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_3\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_4(-1, 0)$, $A_5\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_6\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所

以 P 点坐标可为 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 3 次 $(0, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$(0, -\sqrt{3})$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-1, 0)$, $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0, \sqrt{3})$,

共 15 种, 其中满足条件的共 4 种, 所以 $P = \frac{4}{15}$, 故选 A.

9. 正项数列 $\{a_n\}$, $a_n^2 = 2S_n - n$, 当 $n=1$ 时, $a_1^2 = 2S_1 - 1 = 2a_1 - 1$, $a_1^2 - 2a_1 + 1 = (a_1 - 1)^2 = 0$, 所以 $a_1 = 1$. 当 $n \geq 2$ 时, $a_n^2 - a_{n-1}^2 = 2S_n - 2S_{n-1} - 1 = 2a_n - 1$, $a_{n-1}^2 = a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2$, 所以 $a_{n-1} = a_n - 1$ 或者 $a_{n-1} = 1 - a_n$. 当 $a_{n-1} = a_n - 1$ 时, $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $a_n = n$, $a_5 = 5$; 当 $a_{n-1} = 1 - a_n$ 时, $a_2 = 0$ 与 $\{a_n\}$ 是正项数列矛盾, 所以舍去, 故选 C.

10. 由三视图可得, 该几何体为圆台, 可求其母线长为 $\sqrt{10}$, 上下底面半径分别为 $r=1$ 和 $R=2$, 由圆台表面积公式可得 $S=\pi(rl+Rl+r^2+R^2)=(3\sqrt{10}+5)\pi$, 故选 B.

11. 设内切圆圆心为 O_1 , $AC=BC=3$, $AB=2$, 由等面积法可得内切圆半径 $r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB|+|BC|+|CA|}$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad O_1\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad OO_1=\sqrt{4+\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \text{故选 C.}$$

$$12. \quad \text{令} \begin{cases} b+3c=x, \\ a+b=y, \\ a+2c=z, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=\frac{-2x+2y+3z}{5}, \\ b=\frac{2x+3y-3z}{5}, \\ c=\frac{x-y+z}{5}, \end{cases} \quad \frac{5a+5c}{b+3c}+\frac{11c-3b}{a+b}+\frac{4b-a}{a+2c}=\frac{-x+y+4z}{x}$$

$$+\frac{x-4y+4z}{y}+\frac{2x+2y-3z}{z}, \quad \frac{-x+y+4z}{x}+\frac{x-4y+4z}{y}+\frac{2x+2y-3z}{z}=-8+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{4z}{x}+$$

$$\frac{2x}{z}+\frac{4z}{y}+\frac{2y}{z} \geq 8\sqrt{2}-6, \quad \text{当且仅当 } x=y=\sqrt{2}z \text{ 时取到最小值, 故选 D.}$$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{1}{4}$	6	17π	$y=-x+\sqrt{11}$

【解析】

13. $f(x)=ax^3-3x$, $f'(x)=3ax^2-3$, $f'(2)=12a-3=0$, 故 $a=\frac{1}{4}$, 经验证当 $a=\frac{1}{4}$ 时, $x=2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.

14. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 6 \cos \theta$, 所以 $(\vec{a} \cdot \vec{b})_{\max} = 6$.

15. 两个圆的面积和 $S=\pi\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2+\pi\left(\frac{|BD|}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}(|AC|^2+|BD|^2)$, 由余弦定理可得

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2|AB||BC|\cos B=34-30\cos B, \quad |BD|^2=|AB|^2+|AD|^2-$$

$$2|AB||AD|\cos A=34-30\cos A=34+30\cos B, \quad \text{故 } S=17\pi.$$

16. $\Gamma: \frac{x^2}{10}+y^2=1$, $\Gamma': \frac{y^2}{10}+x^2=1$, 设公切线方程 $l: y=kx+m$, 与 Γ 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{10}+y^2=1, \\ y=kx+m, \end{cases}$

可得 $(1+10k^2)x^2 + 20kmx + 10m^2 - 10 = 0$, $\Delta = 400k^2m^2 - 4(1+10k^2)(10m^2 - 10) = 0$, 得

$$10k^2 + 1 = m^2, \text{ 与 } \Gamma' \text{ 联立 } \begin{cases} \frac{y^2}{10} + x^2 = 1, \\ y = kx + m, \end{cases} \text{ 可得 } (10+k^2)x^2 + 2kmx + m^2 - 10 = 0, \Delta = 4k^2m^2 -$$

$4(10+k^2)(m^2-10) = 0$, 得 $k^2 + 10 = m^2$, 可得 $k = \pm 1$, $m = \pm\sqrt{11}$, 由切点在第一象限可得

公切线方程为 $y = -x + \sqrt{11}$.

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

解：（1）由余弦定理可得 $2ab \cos C + 2ac \cos B + 2bc \cos A$

$$= a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2 + b^2 + c^2 - a^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

所以可得 $b^2 = 4$.

由于 $b > 0$, 所以 $b = 2$（6 分）

（2）已知 $a \cos A = b \cos B$, 由正弦定理可得 $\sin A \cos A = \sin B \cos B$,

由正弦二倍角公式可得 $\sin 2A = \sin 2B$,

$$\because 2A \in (0, 2\pi), 2B \in (0, 2\pi), A + B \in (0, \pi), 2A + 2B \in (0, 2\pi),$$

所以 $2A = 2B$ 或者 $2A + 2B = \pi$,

$$\text{当 } 2A = 2B \text{ 时, } A = B, a = b = 2, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{8},$$

$$\sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{4};$$

$$\text{当 } 2A + 2B = \pi \text{ 时, } A + B = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{2}, a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \sqrt{5}. \text{（12 分）}$$

18.（本小题满分 12 分）

$$\text{解：（1） } a = \frac{1}{5} - (0.01 + 0.02 + 0.04 + 0.05 + 0.02) = 0.06,$$

全市分数在 $[80, 90)$ 之间的人数 $= 15000 \times (0.04 + 0.06) \times 5 = 7500$ 人.

.....（6 分）

(2) 设全市平均分为 \bar{x} ,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 72.5 \times 0.01 \times 5 + 77.5 \times 0.02 \times 5 + 82.5 \times 0.04 \times 5 + 87.5 \times 0.06 \times 5 + 92.5 \times 0.05 \times 5 + \\ &97.5 \times 0.02 \times 5 = 87. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})\end{aligned}$$

19. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 由于 $BE = CD$, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, 所以 $DE \perp AB$,

所以 $DE \perp EB$, $DE \perp EF$, $EB \cap EF = E$,

所以 $DE \perp$ 平面 FEB . $\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

(2) 解: 过 F 作 $FG \perp BE$ 交 BE 的延长线于点 G ,

$FG \perp EB$, $FG \perp DE$, $EB \cap DE = E$,

所以 $FG \perp$ 平面 $BCDE$, $\angle FEG = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, $FE = 2$,

$$FG = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad S_{BCDE} = 4,$$

$$\text{所以 } V_{F-BCDE} = \frac{1}{3} Sh = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

20. (本小题满分 12 分)

(1) 解: $f'(x) = ae^x$, $f'(0) = a = 1$, $f(0) = a + b = 1$,

解得 $a = 1$, $b = 0$. $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

(2) 证明: 当 $x \geq 1$ 时, $e^x \geq e > 2 \geq 2 \sin x$, 故成立;

当 $0 \leq x < 1$ 时, 令 $g(x) = \frac{2 \sin x}{e^x}$,

$$g'(x) = \frac{2(\cos x - \sin x)}{e^x} = \frac{2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{e^x},$$

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

$$g(x)_{\max} = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}} < \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{1}{2}}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1,$$

故任取 $x \in [0, +\infty)$, $f(x) > 2 \sin x$. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$



21. (本小题满分 12 分)

(1) 解: 当过 F 的直线斜率不存在时, 此时弦长为 $2p$;

当过 F 的直线斜率存在时, 设直线方程为 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = k\left(x - \frac{p}{2}\right), \end{cases} \text{ 可得 } k^2x^2 - p(k^2 + 2)x + \frac{p^2k^2}{4} = 0,$$

$$\text{弦长} = x_1 + x_2 + p = \frac{p(k^2 + 2)}{k^2} + p = 2p + \frac{2p}{k^2} > 2p,$$

所以弦长最短 $= 2p = 4$, 所以 $p = 2$.

..... (5 分)

(2) 证明: 设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$,

设过 A 点且与抛物线相切的直线 l_{AQ} : $y = k'\left(x - \frac{y_1^2}{4}\right) + y_1$,

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = k'\left(x - \frac{y_1^2}{4}\right) + y_1, \end{cases} \text{ 可得 } \frac{k'}{4}y^2 - y - \frac{k'y_1^2}{4} + y_1 = 0,$$

$$\Delta = 1 - k'\left(y_1 - \frac{k'y_1^2}{4}\right) = 0, \text{ 解得 } k'y_1 = 2,$$

可得 l_{AQ} : $y_1y = 2x + \frac{y_1^2}{2}$, 同理可得 l_{BQ} : $y_2y = 2x + \frac{y_2^2}{2}$,

联立得 $Q\left(\frac{y_1y_2}{4}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$,

$$|AF| \cdot |BF| = \left(\frac{y_1^2}{4} + 1\right) \left(\frac{y_2^2}{4} + 1\right),$$

$$|QF|^2 = \left(\frac{y_1y_2}{4} - 1\right)^2 + \frac{(y_1 + y_2)^2}{4} = \frac{y_1^2y_2^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} + 1 = \left(\frac{y_1^2}{4} + 1\right) \left(\frac{y_2^2}{4} + 1\right),$$

所以 $|QF|^2 = |AF| \cdot |BF|$.

..... (12 分)



22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

解: (1) 由 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$,

$$A\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right), x_A = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} = 0, y_A = \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{3}, A(0, \sqrt{3}),$$

$$B(1, \pi), x_B = 1 \cdot \cos \pi = -1, y_B = 1 \cdot \sin \pi = 0, B(-1, 0),$$

$$C(1, 0), x_C = 1 \cdot \cos 0 = 1, y_C = 1 \cdot \sin 0 = 0, C(1, 0). \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(2) $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 故外接圆圆心坐标为 $O_1\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

$$\text{外接圆半径为 } r = \frac{2}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以外接圆的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \alpha, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \alpha, \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数}),$$

$$\text{所以 } |MA|^2 = \frac{4 \cos^2 \alpha}{3} + \frac{4 \sin^2 \alpha}{3} - \frac{8 \sin \alpha}{3} + \frac{4}{3},$$

$$|MB|^2 = \frac{4 \cos^2 \alpha}{3} + \frac{4\sqrt{3} \cos \alpha}{3} + 1 + \frac{4 \sin^2 \alpha}{3} + \frac{4 \sin \alpha}{3} + \frac{1}{3},$$

$$|MC|^2 = \frac{4 \cos^2 \alpha}{3} - \frac{4\sqrt{3} \cos \alpha}{3} + 1 + \frac{4 \sin^2 \alpha}{3} + \frac{4 \sin \alpha}{3} + \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } |MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 8. \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

解: (1) 已知 $2x + 2y = xy + 4$, 可得 $(x-2)(y-2) = 0$.

由于 $y > 2$, 所以可得 $x = 2$. $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

(2) 由题可得 $(x-2)(y-2) = 4$,

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1 = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 7 \geq 2(x-2)(y-2) - 7 = 1,$$

当且仅当 $x-2 = y-2 = \pm 2$ 时取等号,

故 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1$ 的最小值为 1.

$\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$