昆明市2021届高三“三诊一模”摸底诊断测试

文科数学参考答案及评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	A	C	A	C	B	B	D	B	D	C

二、填空题

13．$\frac{13}{2}$　　14．120°　　15．19.3　　16．$(\frac{1}{2},\sqrt{3})$

三、解答题

17．解：（1）由正弦定理得 $\sin A\sin B+\sin B\cos A=\sin C$，…………………2分

因为 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以 $\sin A\sin B=\sin A\cos B$，……………………4分

又因为 $\sin A\neq 0$，$\cos B\neq 0$，所以 $\tan B=1$，又 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$．………6分

（2）由余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，$a=\sqrt{2}c$，……………8分

可得 $4=c^2+2c^2-2\sqrt{2}c^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $c=2$．……………12分

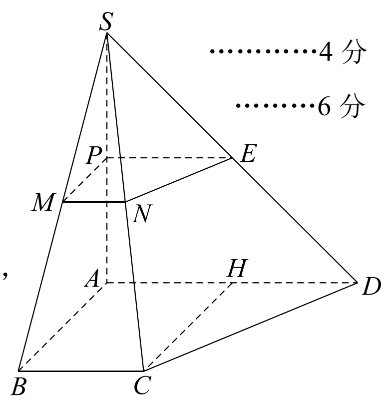
18．解：（1）证明：因为四边形 $ABCH$ 是正方形，所以 $CH\perp AH$．

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CH\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $CH\perp PA$．…………2分

又因为 $AP\cap AH=A$，AH、$AP\subset$ 平面 $PADE$，

所以 $CH\perp$ 平面 $PADE$．…………4分

因为 $ED\subset$ 平面 $PADE$，所以 $CH\perp ED$．………6分



（2）如图，将两个几何体拼成四棱锥 $S-ABCD$，

根据题意，四边形 $ABCD$、$PMNE$ 都是等腰梯形，

因为 P、M、N、E 分别是原四棱锥四条侧棱的中点，

所以 $PE=\frac{1}{2}AD=2$，$PM=\frac{1}{2}AB=1$，$MN=\frac{1}{2}BC=1$，

$SP=\frac{1}{2}SA=2$，所以四棱锥 $S-PMNE$ 的体积

$V_{S-PMNE}=\frac{1}{3}\times\frac{(PE+MN)PM}{2}\times SP=1$，

四棱锥 $S-ABCD$ 的体积 $V_{S-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{(BC+AD)AB}{2}\times SA=8$，

所以 $V_{四棱台PMNE-ABCD}=V_{S-ABCD}-V_{S-PMNE}=7$． ………………………12 分

19．解：（1） $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$， $f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-1$． …………2 分

因为 $f(0)=1$， $f'(0)=0$， …………4 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$． ………6 分

（2）因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-1$， e^x 和 $2x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，又 $f'(0)=0$， …………………8 分

所以当 $x<0$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时， $f(x)_{\min}=f(0)=1$，即对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\geq 1$． ………12 分

20．解：（1）从第 5 局到第 10 局的六局比赛中任选两局，所有可能的基本事件如下：

$\{5,6\}$，$\{5,7\}$，$\{5,8\}$，$\{5,9\}$，$\{5,10\}$，$\{6,7\}$，$\{6,8\}$，$\{6,9\}$，$\{6,10\}$，$\{7,8\}$，$\{7,9\}$，

$\{7,10\}$，$\{8,9\}$，$\{8,10\}$，$\{9,10\}$． ……………………………………4 分

基本事件共 15 个，其中甲均没有取胜的基本事件有 1 个， ………………………5 分

所以，甲至少获胜一局的概率为 $1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$． ……………………………6 分

（2）用样本频率估计概率可知，每局比赛甲获胜的概率为 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，

乙获胜的概率为 $\frac{1}{2}$． ……………………7 分

打满三局比赛的情况有：①甲乙甲；②甲乙乙；③乙甲甲；④乙甲乙；

前两局甲或乙连胜的情况等价于：

⑤甲甲甲；⑥甲甲乙；⑦乙乙甲；⑧乙乙乙，

共有八种等可能事件，

⑤⑥对应的情况是甲以 $2:0$ 获胜， ……………………………………10 分

所以，甲以 $2:0$ 获胜的概率为 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$． ……………………………………12 分

21．解：（1）设椭圆C的半焦距为c，由题知$\triangle MF_1F_2$面积最大值为bc，

则$\begin{cases} bc=3\sqrt{3}, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$　　解得$\begin{cases} a=2\sqrt{3}, \\ b=\sqrt{3}, \\ c=3, \end{cases}$

所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$.　　……………………………………………………5 分

（2）当直线l斜率存在时，设直线$l: y=k(x-3)$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

将$y=kx-3k$代入$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$，得$(1+4k^2)x^2-24k^2x+36k^2-12=0$，

$\Delta=48(k^2+1)>0$恒成立，

所以$x_1+x_2=\dfrac{24k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{36k^2-12}{1+4k^2}$，　　……………………………………7 分

由$l'//l$，则$S_{\triangle RF_2A}=S_{\triangle F_1F_2A}$，$S_{\triangle NF_2B}=S_{\triangle F_1F_2B}$，

则$S_1+S_2=S_{\triangle F_1F_2A}+S_{\triangle F_1F_2B}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=3|k|\cdot|x_1-x_2|$，

$=3|k|\cdot\dfrac{\sqrt{48(k^2+1)}}{1+4k^2}=12\sqrt{3}\times\dfrac{|k|\sqrt{(k^2+1)}}{1+4k^2}=12\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}}{\dfrac{1}{k^2}+4}$，

令$\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}=t$，则$t\geq 1$，

所以$S_1+S_2=12\sqrt{3}\times\dfrac{t}{t^2+3}\leq 12\sqrt{3}\times(\dfrac{t}{2\sqrt{3}t})=6$，当且仅当$t^2=3$时取到等号，

即$1+\dfrac{1}{k^2}=3$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，S_1+S_2取最大值为 6.　　…………………………11 分

当直线l的斜率不存在时，不妨设$A(3,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$B(3,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$R(-3,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$N(-3,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

$S_1+S_2=3\sqrt{3}<6$.

综上，当$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，S_1+S_2的最大值为 6.　　…………………………………12 分

22．解：（1）消去参数得 $C:(x-2)^2+y^2=4$． ……………………2 分

由 $\sqrt{2}\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=3$ 得 $\sqrt{2}\rho(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4})=3$，即 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=3$，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-3=0$． …………………………5 分

（2）直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=3-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$（$t$ 为参数），代入曲线 C 的方程得：

$(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t)^2+\dfrac{1}{2}t^2=4$，整理得 $t^2-\sqrt{2}t-3=0$． ………………………8 分

所以 $t_1+t_2=\sqrt{2}$，$t_1t_2=-3<0$，所以 t_1，t_2 异号，

故 $\left||PA|-|PB|\right|=\left||t_1|-|t_2|\right|=|t_1+t_2|=\sqrt{2}$． ……………………………………10 分

23．解：（1）将 $a=1$，$b=2$ 代入 $f(x)\geq 5$，得 $|x+1|+|x-2|\geq 5$，

等价于：$\begin{cases} x\leq -1, \\ 1-2x\geq 5, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1<x<2, \\ 3\geq 5, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x\geq 2, \\ 2x-1\geq 5, \end{cases}$ ………………………3 分

解得：$x\leq -2$ 或 $x\geq 3$．

所以不等式 $f(x)\geq 5$ 的解集为 $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$． ………………………5 分

（2）证明：$f(x)=|x+a|+|x-b|\geq|a+b|$，

因为 $f(x)$ 的最小值为 2，且 $a>0$，$b>0$，

所以 $a+b=2$．

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+1}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+1})(a+b+1)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{b+1}{a}+\dfrac{a}{b+1}+2)\geq\dfrac{1}{3}(2\sqrt{\dfrac{b+1}{a}\cdot\dfrac{a}{b+1}}+2)=\dfrac{4}{3}$，

当且仅当 $\dfrac{b+1}{a}=\dfrac{a}{b+1}$，即当 $a=b+1$，即 $a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时取等号. …………10 分