18．（12 分）

解：（1）∵ $a_n = 2 - 2S_n$，

∴ $a_{n+1} = 2 - 2S_{n+1}$.……………………………………………………………1 分

∴ $a_{n+1} - a_n = 2 - 2S_{n+1} - (2 - 2S_n) = -2(S_{n+1} - S_n)$.

∵ $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$，

∴ $a_{n+1} - a_n = -2a_{n+1}$，即 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$.

∴ $a_n = a_1(\frac{1}{3})^{n-1}$.……………………………………………………………4 分

由 $a_n = 2 - 2S_n$，$S_1 = a_1$ 得 $a_1 = 2 - 2S_1 = 2 - 2a_1$，解得 $a_1 = \frac{2}{3}$.

∴数列$\{ a_n \}$的通项公式为 $a_n = \frac{2}{3} \times (\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{2}{3^n}$. ……………………………6 分

（2）由（1）知：$a_n = \frac{2}{3^n}$.

∴ $-\log_3 a_n = -\log_3 \frac{2}{3^n} = -\log_3 2 + \log_3 3^n = n - \log_3 2$.………………………8 分

∵ $\log_3 2 \in (0,1)$，

∴ $n - 1 < n - \log_3 2 < n$.

∴ $b_n = \lceil n - \log_3 2 \rceil = n$. ……………………………………………………………10 分

∴数列$\{ b_n \}$的前 n 项和 $T_n = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. ……………………………12 分

19．（12 分）

（1）证明：∵ $PD \perp$ 平面 $ABCD$，$BC \subset$ 平面 $ABCD$，

∴ $PD \perp BC$.

∵ $ABCD$ 是矩形，

∴ $BC \perp CD$.

∵ $PD \cap CD = D$，$PD \subset$ 平面 PCD，$CD \subset$ 平面 PCD，

∴ $BC \perp$ 平面 PCD.

∵ $DE \subset$ 平面 PCD，∴ $BC \perp DE$. ……………………………………………3 分

又∵ $DE\perp PC$， $BC\cap PC=C$， $BC\subset$平面 PBC， $PC\subset$平面 PBC，

∴ $DE\perp$平面 PBC.

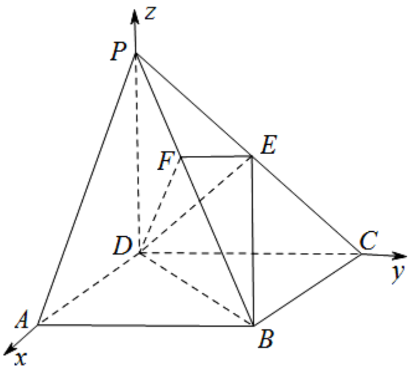
∵ $PB\subset$平面 PBC，

∴ $DE\perp PB$.

又∵ $EF\perp PB$， $EF\cap DE=E$， $EF\subset$平面 EFD， $DE\subset$平面 EFD，

∴ $PB\perp$平面 EFD. ……………………………………………………6 分

（2）解：分别以射线 DA， DC， DP 为 x 轴， y 轴， z 轴的非负半轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，设 $PD=DC=DA=a$，



∵ $PD=DC$， $DE\perp PC$，垂足为 E，

∴ E 是 PC 的中点.

由题意可得 $D(0,0,0)$， $B(a,a,0)$， $C(0,a,0)$，

$P(0,0,a)$， $E(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

∴ $\overrightarrow{BP}=(-a,-a,a)$， $\overrightarrow{DB}=(a,a,0)$， $\overrightarrow{DE}=(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

由（1）知： $\overrightarrow{BP}=(-a,-a,a)$ 是平面 EFD 的一个法向量. ………………………………………………………………………8 分

设平面 DEB 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=ax+ay=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{ay}{2}+\frac{az}{2}=0.\end{cases}$

取 $z=1$，得 $y=-1$， $x=1$.

∴ $\vec{n}=(1,-1,1)$ 是平面 DEB 的一个法向量.………………………………10 分

∴ $\cos<\overrightarrow{BP},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BP}||\vec{n}|}=\frac{1}{3}$.

∵二面角 $F-DE-B$ 的平面角的取值范围为 $(0,\pi)$，

∴二面角 $F-DE-B$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………………12 分

20．（12 分）

解：（1）$\because f(x)=e^{x}+\sin x-2x$，

$\therefore g(x)=f'(x)=e^{x}+\cos x-2$， $g(0)=f'(0)=0$.……………………………2 分

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y-1=0(x-0)$，

即 $y-1=0$. ……………………………………………………………………4 分

（2）实数 m 的取值范围为 $(-\infty,0]$.………………………………………………5 分

$\because g(x)=f'(x)=e^{x}+\cos x-2$，对任意 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$，都有 $x\cdot g(x)\geq x^{2}+m$，

即对任意 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$，都有 $xe^{x}+x\cos x-2x-x^{2}\geq m$.

$\therefore 0e^{0}+0\cos 0-2\times 0-0^{2}\geq m$ 成立，故 $m\leq 0$. ……………………………6 分

下面证明当 $m\leq 0$ 时，对任意 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$，都有 $xe^{x}+x\cos x-2x-x^{2}\geq m$.

设 $F(x)=e^{x}+\cos x-2-x$，

则 $G(x)=F'(x)=\mathrm{e}^{x}-\sin x-1$. ……………………………………………………7 分

设 $H(x)=G'(x)=\mathrm{e}^{x}-\cos x$，

$\because H'(x)=\mathrm{e}^{x}+\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{3},0]$ 单调递增，

又 $\because H'(-\frac{\pi}{3})=e^{-\frac{\pi}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}}}{2e^{\frac{\pi}{3}}}<\frac{2-\sqrt{3}e}{2e^{\frac{\pi}{3}}}<0$， $H'(0)=1>0$.

$\therefore$ 存在唯一实数 $x_{0}\in(-\frac{\pi}{3},0)$，使 $H'(x_{0})=0$.

$\therefore$ 当 $x\in[-\frac{\pi}{3},x_{0})$ 时， $H'(x)<0$；当 $x\in(x_{0},0]$ 时， $H'(x)>0$.

$\therefore H(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},x_{0})$ 单调递减，在 $(x_{0},0]$ 单调递增. ……………………9 分

又$\because H(-\frac{\pi}{3})=e^{-\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2}=\frac{2-e^{\frac{\pi}{3}}}{2e^{\frac{\pi}{3}}}<\frac{2-e}{2e^{\frac{\pi}{3}}}<0$，$H(0)=0$，

$\therefore$当$x\in[-\frac{\pi}{3},\ 0]$时，$H(x)=G'(x)\le 0$，故$G(x)$在$[-\frac{\pi}{3},\ 0]$单调递减.

$\therefore$当$x\in[-\frac{\pi}{3},\ 0]$时，$F'(x)=G(x)\ge G(0)=0$，故$F(x)$在$[-\frac{\pi}{3},\ 0]$单调递增.

$\therefore$当$x\in[-\frac{\pi}{3},\ 0]$时，$F(x)\le F(0)=0$，即$F(x)=e^x+\cos x-2-x\le 0$.

$\therefore$当$x\in[-\frac{\pi}{3},\ 0]$时，$xF(x)=x(e^x+\cos x-2-x)\ge 0$,即$x\cdot g(x)-x^2\ge 0$.

$\because m$的取值范围为$(-\infty,0]$，

$\therefore$对任意$x\in[-\frac{\pi}{3},\ 0]$，都有$x\cdot g(x)-x^2\ge m$，即$x\cdot g(x)\ge x^2+m$.……12分

21.（12分）

解：（1）由已知：P，M，N是椭圆C上的动点，P、F_1、M三点共线，P、F_2、N三点共线.

$\therefore$当ΔF_1PF_2的面积最大时，P是椭圆C在短轴上的顶点.

$\because$当ΔF_1PF_2的面积最大时，ΔMPN为等边三角形，

$\therefore$当ΔF_1PF_2的面积最大时，$\angle F_1PO=\frac{1}{2}\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\angle MPN=30^\circ$，

其中O是坐标原点. ……………………………………………………………2分

$\therefore$当ΔF_1PF_2的面积最大时，$e=\frac{c}{a}=\sin\angle F_1PO=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

$\therefore$椭圆C的离心率为$\frac{1}{2}$. ………………………………………………………4分

（2）由（1）知：$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

$\therefore c=\frac{1}{2}a$，$b^2=a^2-c^2=\frac{3a^2}{4}$.

$\therefore$椭圆C的方程可化为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{3a^2}=1$，$F_1(-\frac{1}{2}a,0)$，设$P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$.

$\therefore \overrightarrow{PF_1}=(-\dfrac{a}{2}-x_0,-y_0)$， $\overrightarrow{F_1M}=(x_1+\dfrac{a}{2},y_1)$.

由已知和 $\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$ 得： $x_1=\dfrac{-x_0-\dfrac{(1+\lambda)a}{2}}{\lambda}$， $y_1=-\dfrac{y_0}{\lambda}$.……………6 分

$\because M(x_1,y_1)$ 在椭圆 C 上，

$\therefore \dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{4y_1{}^2}{3a^2}=1$，即 $\dfrac{1}{a^2}\times[\dfrac{-x_0-\dfrac{(1+\lambda)a}{2}}{\lambda}]^2+\dfrac{4}{3a^2}\times(-\dfrac{y_0}{\lambda})^2=1$.

$\therefore \dfrac{1}{\lambda^2}(\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{4y_0^2}{3a^2})+\dfrac{(1+\lambda)x_0}{a\lambda^2}+\dfrac{(1+\lambda)^2}{4\lambda^2}=1$.

$\because P(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上，

$\therefore \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{4y_0^2}{3a^2}=1$.

$\therefore \dfrac{1}{\lambda^2}+\dfrac{(1+\lambda)x_0}{a\lambda^2}+\dfrac{(1+\lambda)^2}{4\lambda^2}=1$，解方程得 $\lambda=\dfrac{5a+4x_0}{3a}$. …………………8 分

同理可得 $\mu=\dfrac{5a-4x_0}{3a}$.

$\therefore$直线 $\lambda x+\mu y=1$ 可化为 $\dfrac{5a+4x_0}{3a}x+\dfrac{5a-4x_0}{3a}y=1$.

$\because \dfrac{5a+4x_0}{3a}\times\dfrac{3}{10}+\dfrac{5a-4x_0}{3a}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{5a+4x_0+5a-4x_0}{3a}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{10a}{3a}=1$，

$\therefore$直线 $\dfrac{5a+4x_0}{3a}x+\dfrac{5a-4x_0}{3a}y=1$ 经过定点 $(\dfrac{3}{10},\dfrac{3}{10})$. …………………10 分

即直线 $\lambda x+\mu y=1$ 经过定点 $(\dfrac{3}{10},\dfrac{3}{10})$.

$\because b^2=a^2-c^2=\dfrac{3a^2}{4}$， $b>\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{4b^2}<3$.

$\because \dfrac{1}{a^2}\times(\dfrac{3}{10})^2+\dfrac{4}{3a^2}\times(\dfrac{3}{10})^2=\dfrac{9}{100}(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{3a^2})=\dfrac{9}{100}\times\dfrac{7}{3a^2}=\dfrac{21}{100}\times\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{63}{100}<1$，

$\therefore$定点 $(\dfrac{3}{10},\dfrac{3}{10})$ 在椭圆 C 内.

$\therefore$直线 $\lambda x+\mu y=1$ 与椭圆 C 有两个公共点.……………………………12 分

22．（10 分）选修 $4-4$：坐标系与参数方程

解：（1）点 B 的直角坐标为 $(4,0)$，……………………………………………………1 分

曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，…………………………………………3 分

曲线 C_2 的普通方程为 $x^2+y^2-4x=0$.……………………………………………5 分

（2）由已知设 $A(\cos\varphi,2\sin\varphi)$，点 A 到 x 轴的距离 $d=2|\sin\varphi|$.

由（1）知：点 B 的直角坐标为 $(4,0)$.

$\therefore \Delta AOB$ 的面积 $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}|OB|d=\dfrac{1}{2}\times4\times2|\sin\varphi|=4|\sin\varphi|$. ……………8 分

$\because |\sin\varphi|$ 的最大值为 1，

$\therefore 4|\sin\varphi|$ 的最大值为 4.

$\therefore \Delta AOB$ 面积的最大值为 4. ………………………………………………10 分

23．（10 分）选修 $4-5$：不等式选讲

（1）证明：$\because a>0$，$b>0$，$a+b=2$，

$$\therefore (\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1})^2=(a+b)+2+2\sqrt{a+1}\sqrt{b+1}$$ ……………………………2 分

$$=2+2+2\sqrt{a+1}\sqrt{b+1}$$

$$\le 4+2\times\frac{(a+1)+(b+1)}{2}$$

$$=4+(a+b)+2=8.$$ ……………………………………4 分

$\therefore \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\le 2\sqrt{2}$. ……………………………………………………5 分

（2）解：$\because a>0$，$b>0$，$a+b=2$，

$\therefore ab=(\sqrt{ab})^2\le(\dfrac{a+b}{2})^2=1$.

又 $\because$ 当 $a=b=1$ 时，$ab=1$.

$\therefore ab$ 的最大值为 1.

$\therefore$ 不等式 $|2x+1|-|2x-3|\ge ab$ 对满足已知条件的所有 a、b 都成立

$\Leftrightarrow |2x+1|-|2x-3| \geq 1$成立.……………………………………………6 分

当$x \leq -\dfrac{1}{2}$时，不等式化为$-2x-1-(3-2x) \geq 1$，化简得$-4 \geq 1$，不成立，所以不等式无解；

当$-\dfrac{1}{2} < x \leq \dfrac{3}{2}$时，不等式化为$2x+1-(3-2x) \geq 1$，解得$x \geq \dfrac{3}{4}$；

$\therefore \dfrac{3}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$.

当$x > \dfrac{3}{2}$时，不等式化为$2x+1-(2x-3) \geq 1$，化简得$4 \geq 1$，恒成立.

$\therefore x > \dfrac{3}{2}$.

$\therefore |2x+1|-|2x-3| \geq 1$的解集为$[\dfrac{3}{4}, +\infty)$.

综上，实数x的取值范围是$[\dfrac{3}{4}, +\infty)$. ……………………………………………10 分

请注意：以上参考答案与评分标准仅供阅卷时参考，其他答案请参考评分标准酌情给分.