昆明市2021届“三诊一模”高考模拟考试

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	A	D	B	C	C	D	B	A	D

二、填空题

13． 2

14． $(6,6)$（其它答案：$(5,7)$，$(7,5)$，$(4,8)$，$(8,4)$）

15． $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

16． 1297

三、解答题

17．解：

（1）依题意：$BD=2CD=2$，$BC=3$，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得：$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}$，………………………………3分

即$\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sin C}$，所以$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；………………………………………………6分

（2）因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AC=2\sqrt{3}$，所以$AC=4$，………………8分

由$BD=2CD$可得，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，………………………………………10分

则$\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2=\dfrac{84}{9}$，所以$AD=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$．………………12分

18．解：

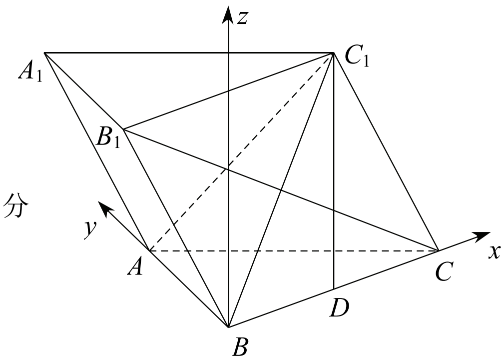
证明：（1）设 BC 中点为 D，连结 C_1D，

因为 C_1 在底面 ABC 上的射影为 BC 中点，所以 $C_1D\perp$ 平面 ABC，

又因为 $C_1D\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABC，

又因为平面 $ABC\cap$ 平面 $BCC_1B_1=BC$， $AB\perp BC$，

所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，



因为 $B_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AB\perp B_1C$，……………………4 分

又因为四边形 BCC_1B_1 为菱形，

所以 $B_1C\perp BC_1$，

而 $AB\cap BC_1=B$，所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1．………………………………6 分

（2）不妨设 $BC=2$，则 $AB=1$，

因为 $C_1D\perp BC$， $BD=DC$，所以 $C_1B=C_1C$，

又因为四边形 BCC_1B_1 为菱形，所以 $C_1C=CB$，故 $\triangle C_1BC$ 为等边三角形，

所以 $\angle BCC_1=60°$，故 $C_1D=\sqrt{3}$，由（1）知 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1， $AB\perp BC$，

以 B 为原点，建立空间直角坐标系 $B-xyz$ 如图，

$B(0,0,0)$， $A(0,1,0)$， $C(2,0,0)$, $B_1(-1,0,\sqrt{3})$， $C_1(1,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{CB_1}=(-3,0,\sqrt{3})$，…………………………………………………………8 分

设平面 ACC_1A_1 法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{AC}=(2,-1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(1,-1,\sqrt{3})$，由$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0\\\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，

可得一个$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},2\sqrt{3},1)$，…………………………………………………10 分

设CB_1与平面ACC_1A_1所成角为θ，则$\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{CB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CB_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-3\sqrt{3}+\sqrt{3}|}{2\sqrt{3}\times4}=\dfrac{1}{4}$，

所以CB_1与平面ACC_1A_1所成角的正弦值为$\dfrac{1}{4}$．……………………………12 分

19．解：

（1）由题，可知$\overline{x}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}x_i}{8}=\dfrac{360}{8}=45$，$\overline{y}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}y_i}{8}=\dfrac{288}{8}=36$，……………………2 分

所以$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i-8\,\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2-8\overline{x}^2}=\dfrac{13310-8\times45\times36}{16714-8\times45^2}=\dfrac{175}{257}\approx0.681\approx0.68$，…………4 分

故$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\approx36-0.681\times45\approx5.36$．

所以y关于x的回归方程为$\hat{y}=0.68x+5.36$．………………………………6 分

$\hat{b}$的现实意义为年收入每增加 1 千元，估计消费支出增加0.68千元．……8 分

（2）由题意可知，8 户脱贫家庭的恩格尔系数如下表所示：

家庭（i）	1	2	3	4	5	6	7	8
恩格尔系数	33.3%	33.3%	33.3%	37.1%	32.4%	27.5%	28.6%	27.2%

所以样本中达到最富裕的家庭有 3 个，

估计该村脱贫家庭中达到最富裕的家庭户数为$\dfrac{3}{8}\times40=15$（户）．………………12 分

20．解：

（1）$f'(x)=x^2-2x+1-a^2=[x-(1-a)][x-(1+a)]$，………2 分

①当$1+a=1-a$即$a=0$时，$f'(x)\geq0$，$f(x)$单调递增，与题设矛盾，则$a\neq0$．

②当$1+a<1-a$即$a<0$时，$f(x)$在$(-\infty,1+a]$，$[1-a,+\infty)$上单调递增，

在$(1+a,1-a)$上单调递减，所以$x_1=1+a$，由$0<1+a<1$，解得$-1<a<0$.

③当$1+a>1-a$即$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,1-a]$，$[1+a,+\infty)$上单调递增，

在$(1-a,1+a)$上单调递减，所以$x_1=1-a$，由$0<1-a<1$，解得$0<a<1$.

综上所述，a的取值范围是$(-1,0)\cup(0,1)$. ……………………6分

（2）因为$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^3-a^2(x-1)+a^3-a^2+\frac{1}{3}$，

所以$f(x)$图象关于$(1,a^3-a^2+\frac{1}{3})$对称，而$\frac{x_1+x_2}{2}=1$，所以$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f(1)$，

又因为$\exists a\in(0,1]$使$f(x_1)+f(x_2)\le 2m$，即$\exists a\in(0,1]$使$m\ge f(1)=a^3-a^2+\frac{1}{3}$，

令$g(x)=x^3-x^2+\frac{1}{3}$，$x\in(0,1]$，

所以$g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$，可得$g(x)$在$(0,\frac{2}{3}]$上单调递减，$(\frac{2}{3},1]$单调递增，

所以$g(x)_{\min}=g(\frac{2}{3})=\frac{5}{27}$，则$m\ge\frac{5}{27}$，

综上，m的取值范围为$[\frac{5}{27},+\infty)$. ……………………………12分

21．解：

（1）由已知可得，经过T和圆心的直线方程为$y=-2x+3$，

代入$x^2+(y-3)^2=5$得$5x^2=5$，$x=1$或$x=-1$（舍去），

所以$T(1,1)$. ………………………………………………………………2分

由点T在抛物线上，得$1^2=2p\times1$，所以$p=\frac{1}{2}$，

故E的方程为$y^2=x$. ………………………………………………………………4分

（2）证明：设$A(m^2,m)$ $(m\ne0)$，直线AB的方程为$x=ty+a$，

代入E的方程，得$y^2-ty-a=0$，所以$my_B=-a$，所以$y_B=-\frac{a}{m}$，所以$B(\frac{a^2}{m^2},-\frac{a}{m})$，

同理可得 $C(4m^2, 2m)$，$D(\frac{4a^2}{m^2}, -\frac{2a}{m})$，

直线 AC 的方程为 $y-m=\frac{1}{3m}(x-m^2)$，即 $x-3my+2m^2=0$，

直线 BD 的方程为 $y+\frac{a}{m}=-\frac{m}{3a}(x-\frac{a^2}{m^2})$，即 $x+\frac{3a}{m}y+\frac{2a^2}{m^2}=0$.

由 $\begin{cases} x-3my+2m^2=0, \\ x+\frac{3a}{m}y+\frac{2a^2}{m^2}=0, \end{cases}$ 得 $y_P=\frac{2}{3}(m-\frac{a}{m})$，……………………………………………8 分

则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|PA||PB|\sin\angle APB}{\frac{1}{2}|PC||PD|\sin\angle APB}=\frac{|PA|}{|PC|}\times\frac{|PB|}{|PD|}=\frac{y_P-y_A}{y_P-y_C}\times\frac{y_P-y_B}{y_P-y_D}$.

而 $y_P-y_A=\frac{2}{3}(m-\frac{a}{m})-m=-\frac{1}{3}(m+\frac{2a}{m})$，$y_P-y_C=\frac{2}{3}(m-\frac{a}{m})-2m=-\frac{2}{3}(2m+\frac{a}{m})$，

$y_P-y_B=\frac{2}{3}(m-\frac{a}{m})+\frac{a}{m}=\frac{1}{3}(2m+\frac{a}{m})$，$y_P-y_D=\frac{2}{3}(m-\frac{a}{m})+\frac{2a}{m}=\frac{2}{3}(m+\frac{2a}{m})$，

所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{4}$ 是定值. ……………………………………………12 分

22．解：

（1）曲线 C_1 的极坐标方程为：$2\rho^2\cos^2\theta-\rho(\sin\theta+\cos\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，……3 分

曲线 C_2 的直角坐标方程为：$(x-a)^2+y^2=a^2$. ………………………5 分

（2）将 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入 $2\rho^2\cos^2\theta-\rho(\sin\theta+\cos\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，得 $\frac{1}{2}\rho^2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\rho+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，

即 $(\rho-1)(\rho-\sqrt{3})=0$，解得 $\rho_1=1$，$\rho_2=\sqrt{3}$，所以 $|AB|=|\rho_2-\rho_1|=\sqrt{3}-1$. ……8 分

又 $|OM|=2a\cos\frac{\pi}{3}=a$，而 $|OM|=|AB|$，

所以 $a=\sqrt{3}-1$. ……………………………………………………………10 分

23．解：

（1）$|x|+|x-1|=\begin{cases}1-2x, & x<0,\\ 1, & 0\le x\le 1,\\ 2x-1, & x>1,\end{cases}$ 可知 $2a+3b+4c\le 1$，

所以 $2a+3b+4c$ 的最大值为 1． ……………………………………………5 分

（2）$\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{3b-1}+\dfrac{1}{4c+2}=(\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{3b-1}+\dfrac{1}{4c+2})[(2a+1)+(3b-1)+(4c+2)]\times\dfrac{1}{3}$

$=(\dfrac{3b-1}{2a+1}+\dfrac{2a+1}{3b-1}+\dfrac{2a+1}{4c+2}+\dfrac{4c+2}{2a+1}+\dfrac{4c+2}{3b-1}+\dfrac{3b-1}{4c+2}+3)\times\dfrac{1}{3}\ge 3$．

当且仅当 $a=0$，$b=\dfrac{2}{3}$，$c=-\dfrac{1}{4}$ 时取等号． ……………………………………10 分