昆明市2021届“三诊一模”高考模拟考试

文科数学参考答案及评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	A	D	B	D	C	D	C	A	B

二、填空题

13．1　14．8　15．$(6,6)$（其它答案：$(5,7)$，$(7,5)$，$(4,8)$，$(8,4)$）　16．$(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$

三、解答题

17．解：

（1）依题意得 $BD=2$，则 $BC=3$，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，……………………………………3 分

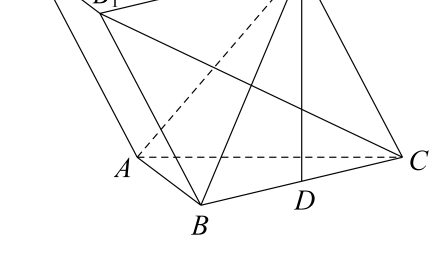
即 $\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sin C}$，所以 $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．……………………………………………………6 分

（2）因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=2\sqrt{3}$，所以 $b=4$，………………………………8 分

由 $BD=2CD$ 可得，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，…………………………………………10 分

则 $\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2=\dfrac{84}{9}$，所以 $AD=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$．………………12 分

18．解：



证明：（1）因为平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABC，

平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $ABC=BC$，

又 $AB\perp BC$，$AB\subset$ 平面 ABC，

所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，

又 $B_1C \subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AB \perp B_1C$， ……………………………4 分

又因为四边形 BCC_1B_1 为菱形，所以 $B_1C \perp BC_1$，

而 $AB \cap BC_1 = B$，且 AB、$BC_1 \subset$ 平面 ABC_1，

所以 $B_1C \perp$ 平面 ABC_1． ……………………………………………………6 分

（2）过 C_1 作 $C_1D \perp BC$，垂足为 D，则 D 为 BC 中点，

因为平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABC，

平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $ABC = BC$，

又 $C_1D \perp BC$，$C_1D \subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $C_1D \perp$ 平面 ABC，

因为 $BC = 2$，$\angle BCC_1 = 60°$，所以 $C_1D = \sqrt{3}$，………………………8 分

由 $AB = 1$，$BC = 2$，$C_1D = \sqrt{3}$，$\angle ABC_1 = 90°$，

所以 $V_{四棱锥C_1-A_1ABB_1} = V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1} - V_{三棱锥C_1-ABC}$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sqrt{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$ ……………12 分

19．解：

（1）由题，可知 $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \dfrac{360}{8} = 45$，$\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{8} = \dfrac{288}{8} = 36$，……………………2 分

所以 $\hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} x_i y_i - 8\,\overline{x} \cdot \overline{y}}{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - 8\overline{x}^2} = \dfrac{13310 - 8 \times 45 \times 36}{16714 - 8 \times 45^2} = \dfrac{175}{257} \approx 0.681 \approx 0.68$，…………4 分

故 $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} \approx 36 - 0.681 \times 45 \approx 5.36$．

所以 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 0.68x + 5.36$． ………………………………6 分

$\hat{b}$ 的现实意义为年收入每增加 1 千元，估计消费支出增加 0.68 千元．………8 分

（2）由题意可知，8 户脱贫家庭的恩格尔系数如下表所示：

家庭（i）	1	2	3	4	5	6	7	8
恩格尔系数	33.3%	33.3%	33.3%	37.1%	32.4%	27.5%	28.6%	27.2%

所以样本中达到最富裕的家庭有 3 个，

估计该村脱贫家庭中达到最富裕的家庭户数为$\frac{3}{8}\times 40=15$（户）．…………12 分

20．解：

（1）$f'(x)=3mx^2$，由题意得$\begin{cases} f(1)=\frac{4}{3}, \\ f'(1)=1, \end{cases}$ 即$\begin{cases} m+n=\frac{4}{3}, \\ 3m=1, \end{cases}$

解得$\begin{cases} m=\frac{1}{3}, \\ n=1. \end{cases}$ ……………………5 分

（2）由（1）得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+1$，所以 $g(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3a^2x+1$，

$g'(x)=x^2+2ax-3a^2=(x+3a)(x-a)$，

①当 $a=0$ 时，$g'(x)\geq 0$,则 $g(x)$ 无极值，与题设矛盾，所以 $a\neq 0$.

②当 $a>0$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,-3a)$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-3a,a)$ 单调递减.

所以 $g(x)$ 极大值为 $g(-3a)=9a^3+1$，极小值为 $g(a)=-\frac{5}{3}a^3+1$，

所以 $g(-3a)-g(a)=\frac{32}{3}a^3=\frac{4}{3}$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

③当 $a<0$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,a)$，$(-3a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,-3a)$ 单调递减.

所以 $g(x)$ 极大值为 $g(a)=-\frac{5}{3}a^3+1$，极小值为 $g(-3a)=9a^3+1$，

所以 $g(a)-g(-3a)=-\frac{32}{3}a^3=\frac{4}{3}$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

综上所述，实数 a 的值为 $\pm\frac{1}{2}$. ……………………12 分

21．解：

（1）由题意得 $|TF|=p$，因为点 G 在 E 上且 $GF\perp x$ 轴，所以 $|GF|=p$，

则 $S_{\triangle GTF}=\frac{1}{2}p\times p=\frac{1}{8}$，解得 $p=\frac{1}{2}$，

所以 E 的方程为 $y^2=x$. ………………………4 分

（2）证明：设 $A(m^2,m)$ $(m\neq 0)$，直线 AB 的方程为 $x=ty+a$，

代入 E 的方程，得 $y^2-ty-a=0$，所以 $my_B=-a$，所以 $y_B=-\dfrac{a}{m}$，

所以 $B(\dfrac{a^2}{m^2},-\dfrac{a}{m})$，　…………………………………………………………7 分

同理可得 $C(4m^2,2m)$，$D(\dfrac{4a^2}{m^2},-\dfrac{2a}{m})$，…………………………………9 分

所以 $k_{AB}=\dfrac{m+\dfrac{a}{m}}{m^2-\dfrac{a^2}{m^2}}=\dfrac{m}{m^2-a}$，$k_{CD}=\dfrac{2m+\dfrac{2a}{m}}{4m^2-\dfrac{4a^2}{m^2}}=\dfrac{m}{2m^2-2a}$，则 $\dfrac{k_{AB}}{k_{CD}}=2$，

所以直线 AB 与 CD 的斜率之比为定值 2．…………………………………………12 分

22．解：

（1）曲线 C_1 的极坐标方程为：$2\rho^2\cos^2\theta-\rho(\sin\theta+\cos\theta)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$，……………3 分

曲线 C_2 的直角坐标方程为：$(x-a)^2+y^2=a^2$．………………………………5 分

（2）将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入 $2\rho^2\cos^2\theta-\rho(\sin\theta+\cos\theta)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$，得 $\dfrac{1}{2}\rho^2-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\rho+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$，

即 $(\rho-1)(\rho-\sqrt{3})=0$，解得 $\rho_1=1$，$\rho_2=\sqrt{3}$，所以 $|AB|=|\rho_2-\rho_1|=\sqrt{3}-1$．……8 分

又 $|OM|=2a\cos\dfrac{\pi}{3}=a$，而 $|OM|=|AB|$，

所以 $a=\sqrt{3}-1$．……………………………………………………………………10 分

23．解：

（1）$|x|+|x-1|=\begin{cases}1-2x, & x<0,\\ 1, & 0\le x\le 1,\\ 2x-1, & x>1,\end{cases}$ 可知 $2a+3b+4c\le 1$，

所以 $2a+3b+4c$ 的最大值为 1．…………………………………………………5 分

（2）$\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{3b-1}+\dfrac{1}{4c+2}=(\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{3b-1}+\dfrac{1}{4c+2})[(2a+1)+(3b-1)+(4c+2)]\times\dfrac{1}{3}$

$=(\dfrac{3b-1}{2a+1}+\dfrac{2a+1}{3b-1}+\dfrac{2a+1}{4c+2}+\dfrac{4c+2}{2a+1}+\dfrac{4c+2}{3b-1}+\dfrac{3b-1}{4c+2}+3)\times\dfrac{1}{3}\ge 3$．

当且仅当 $a=0$，$b=\dfrac{2}{3}$，$c=-\dfrac{1}{4}$ 时取等号．…………………………………10 分