文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	C	B	A	A	B	D	B	D	A

【解析】

1．$B=\{x\,|\,\ln x\geqslant 1\}=\{x\,|\,x\geqslant \mathrm{e}\}$，则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=[2,\ \mathrm{e})$，故选 B．

2．设 $z=x+y\mathrm{i}(x,\ y\in\mathbf{R})$，由 $2z+\bar{z}=3+\mathrm{i}$，得 $3x+y\mathrm{i}=3+\mathrm{i}$，所以 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

所以复数 $\dfrac{1}{z}$ 在复平面内对应的点为 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，即复数 z 在复平面上对应的点位于第四象限，故选 D．

3．根据平移变换不改变向量的长度和方向，故选 C．

4．∵若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 5 的奇函数，∴ $f(-x)=-f(x)$，$f(x+5)=f(x)$，∴ $f(-12)=-f(12)$ $=-f(2)=-2$，$f(4)=f(-1)=-f(1)=-1$，∴ $f(-12)-f(4)=-2-(-1)=-1$，故选 C．

5．对于 A，因为每次抛掷硬币都是随机事件，所以不一定有 500 次“正面朝上”，故 A 错误；对于 B，因为方差越小越稳定，故 B 正确；对于 C，为了解我国中学生的视力情况，应采取抽样调查的方式，故 C 错误；对于 D，数据 1、2、5、5、5、3、3 按从小到大排列后为 1、2、3、3、5、5、5，则其中位数为 3，故 D 错误，故选 B．

6．B 选项中，还可以是 α 与 β 相交，B 错误；C 选项中，m 和 n 还可以是异面直线，C 错误；D 选项中，还可以是 $l\subset\alpha$，D 错误，故选 A．

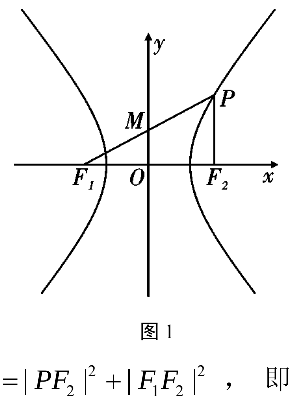

图 1

7．设线段 PF_1 的中点为 M，连接 OM，PF_2．∵线段 PF_1 的中点 M 坐标为 $(0,\ b)$，∴点 P 在双曲线 C 的右支上．如图 1 所示：∵原点 O 为线段 F_1F_2 的中点，∴ $OM \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \dfrac{1}{2}PF_2$，即 $PF_2\perp F_1F_2$，$|PF_2|=2|OM|=2b$．由双曲线的定义可知，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，即 $|PF_1|=2a+2b$，$|F_1F_2|=2c$，在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2P$ 中，$|PF_1|^2=|PF_2|^2+|F_1F_2|^2$，即 $(2a+2b)^2=(2b)^2+(2c)^2$，整理得 $b=2a$，$\dfrac{b}{a}=2$，故选 A．

8．$f(x)=(\sin x+\cos x)^2-\cos 2x=1+\sin 2x-\cos 2x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π，$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}+1$，C，A 正确；当 $x=\frac{3\pi}{8}$ 时，$\sin\left(2\times\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)=1$，所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{8}$ 对称，D 正确；因为 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=1\neq 0$，所以 $x=\frac{\pi}{8}$ 不是函数 $f(x)$ 的零点，B 错误，故选 B．

9．函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx+9$ 在 $\mathbf{R}$ 上无极值 $\Leftrightarrow f'(x)=x^2-2mx+m$ 在 $\mathbf{R}$ 上无变号零点 $\Leftrightarrow \Delta=4m^2-4m\leqslant 0\Leftrightarrow 0\leqslant m\leqslant 1$，故选 D．

10．由题设和抛物线定义知：$\frac{S_{\triangle ABB_1}}{S_{\triangle ABA_1}}=\frac{\frac{1}{2}|BB_1||A_1B_1|}{\frac{1}{2}|AA_1||A_1B_1|}=\frac{|BB_1|}{|AA_1|}=\frac{|BF|}{|AF|}=4$，设直线 AB 的倾斜角为 α，则 $|AF|=\frac{2}{1+\cos\alpha}$，$|BF|=\frac{2}{1-\cos\alpha}$，所以 $\frac{8}{1+\cos\alpha}=\frac{2}{1-\cos\alpha}$，解得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{4}{3}$，故选 B．

11．设 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$，$x\geqslant \mathrm{e}$，则 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}\geqslant 0$ 恒成立，∴函数 $f(x)$ 在 $[\mathrm{e}，+\infty)$ 上单调递增，又 $a=f(\mathrm{e})$，$b=f(3)$，$c=\frac{5}{\ln 5}=f(5)$，∵ $\mathrm{e}<3<5$，∴ $a<b<c$，故选 D．

12．如图 2，10 个半径为 1 的小球放进棱长为 a 的正四面体 $ABCD$ 中，成三棱锥形状，有 3 层，则从上到下每层的小球个数依次为：1，$(1+2)$，$(1+2+3)$ 个，当 a 取最小值时，从上到下每层放在边缘的小球都与正四面体的侧面相切，底层的每个球都与正四面体底面相切，任意相邻的两个小球都外切，位于每层正三角状顶点的所有上下相邻小球的球心连线为一个正四面体 $EFGH$，则该正四面体的棱长为 $(3-1)(1+1)=4$，可求得其高为 $EP=4\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，所以正四面体 $ABCD$ 的高为 $AQ=AE+EP+PQ=1\times 3+\frac{4\sqrt{6}}{3}+1=4+\frac{4\sqrt{6}}{3}$，进而可求得其棱长 a 的最小值为 $4+2\sqrt{6}$，故选 A．

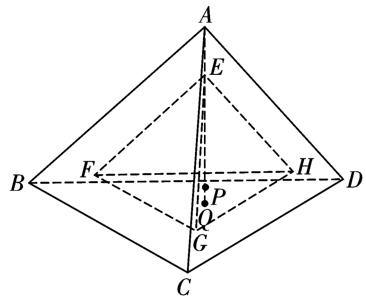

图 2

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$(x+5)^2+(y-10)^2=81$	$3x-4y=0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{6\sqrt{3}}{17}$

【解析】

13．圆心 $C(3,\ -6)$ 关于点 $A(-1,\ 2)$ 中心对称点的坐标为 $C'(-5,\ 10)$，故所求圆的方程为 $(x+5)^2+(y-10)^2=81$．

14．由题设知△ABC 是直角三角形，则其垂心为直角顶点 $A(0,\ 0)$，其外心为斜边 BC 的中点 $M(4,\ 3)$，故其“欧拉线”的方程为 $3x-4y=0$．

15．法一：由三角形的射影定理知：$b=c\cos A+a\cos C$，又 $b=c\cos A+a\sin C$，$\therefore \sin C=\cos C\Rightarrow \tan C=1\Rightarrow C=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

法二：由正弦定理再结合两角和正弦公式求得 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

16．如图 3，由入射角等于反射角原理知：分别顺次以正六边形的 BC，CD_1，D_1E_1，E_1F_1，F_1A_1 边为对称轴作 5 次对称变换后可知，小球的运行轨迹即为线段 PR，过 R 作直线 AB 的垂线 RS，垂足为 S，则由题设易知：$RS=6\sqrt{3}$，$PS=17$，故 $\tan\theta=\tan\angle BPQ=\frac{RS}{PS}=\frac{6\sqrt{3}}{17}$．

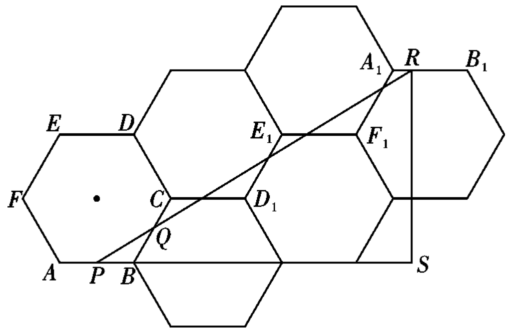

图 3

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

（1）证明：因为 $2a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n=\frac{n+1}{n}a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以，$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{2n}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

又 $\frac{a_1}{1}=1\neq 0$，所以 $\dfrac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}}=\frac{1}{2}$，

故数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$为等比数列，首项为 1，公比为$\dfrac{1}{2}$.

所以$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_1}{1}\bullet\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，故$a_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

…………………………………………………………（6 分）

（2）解：$\because S_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}+\dfrac{n}{2^{n-1}}$ ①，

$\therefore \dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$ ②，

①、②式错位相减得：

$$\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n},$$

$\therefore S_n=\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^{n-1}}$.　　　…………………………………………………（12 分）

18.（本小题满分 12 分）

（1）证明：因为$AB\perp$平面BB_1C_1C，$C_1B\subset$平面BB_1C_1C，

所以$AB\perp C_1B$.

在$\triangle BCC_1$中，$BC=1$，$BC_1=\sqrt{3}$，$CC_1=2$，

所以$BC^2+BC_1^2=CC_1^2$，

所以$CB\perp C_1B$.

因为$AB\cap BC=B$，AB，$BC\subset$平面ABC，

所以$C_1B\perp$平面ABC.　　…………………………………………………（6 分）

（2）解：如图 4，取B_1C_1的中点D，连接ED，

则$ED/\!/A_1B_1$且$ED=\dfrac{1}{2}A_1B_1=1$，

$\because A_1B_1\perp$平面B_1C_1CB，

$\therefore ED\perp$平面B_1C_1CB，

$\therefore ED$是点E到平面B_1C_1CB的距离.

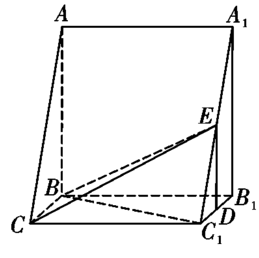

图 4

由题设及（1）知 $\angle CBC_1 = \angle BC_1E = 90°$，

设点 C 到平面 BC_1E 的距离为 d，又 $C_1E = \sqrt{C_1D^2 + DE^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$，

则由等体积法：$V_{C-BC_1E} = V_{E-BCC_1}$，即 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 1$，

解得 $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$，故点 C 到平面 BC_1E 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$． ………………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

解：（1）由已知，甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数之比为 3∶2∶1，

由于采用分层抽样的方法从中抽取 6 名同学，

因此应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取 3 人，2 人，1 人．

……………………………………………………………（3 分）

（2）（i）从抽出的 6 名同学中随机抽取 2 名同学的所有可能结果为

$\{A，B\}$，$\{A，C\}$，$\{A，D\}$，$\{A，E\}$，$\{A，F\}$，$\{B，C\}$，$\{B，D\}$，$\{B，E\}$，$\{B，F\}$，$\{C，D\}$，$\{C，E\}$，$\{C，F\}$， $\{D，E\}$，$\{D，F\}$，$\{E，F\}$，共 15 种．

（ii）由（i），不妨设抽出的 6 名同学中，来自甲年级的是 A，B，C，来自乙年级的是 D，E，来自丙年级的是 F，则从抽出的 6 名同学中随机抽取的 2 名同学来自同一年级的所有可能结果为 $\{A，B\}$，$\{A，C\}$，$\{B，C\}$，$\{D，E\}$，共 4 种．

所以，事件 M 发生的概率为 $P(M) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$． ………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

（1）解：由椭圆定义知：$2a = |MF_1| + |MF_2| = \sqrt{(1-(-1))^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2} + \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2} = 4$，

所以 $a = 2$，又 $c = 1$，

$\therefore b^2 = 3$，因此椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$． ………………………………（4 分）

（2）证明：设直线 l 的方程为 $x = my - 1$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$N(-4，y_1)$，

由 $\begin{cases} x = my - 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消去 x，整理得：$(4 + 3m^2)y^2 - 6my - 9 = 0$，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{4+3m^2}$ ①，$y_1y_2=\dfrac{-9}{4+3m^2}$ ②，

又 $N(-4，y_1)$，所以直线 BN 的方程为 $y-y_1=k_{BN}(x+4)$，

即 $y=k_{BN}\left(x+4+\dfrac{y_1}{k_{BN}}\right)$ ③，

又 $k_{BN}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+4}=\dfrac{y_2-y_1}{(my_2-1)+4}=\dfrac{y_2-y_1}{my_2+3}$，

所以 $\dfrac{y_1}{k_{BN}}=\dfrac{y_1(my_2+3)}{y_2-y_1}=\dfrac{my_1y_2+3y_1}{y_1+y_2-2y_1}$ ④，

将①、②式代入④式化简得：$\dfrac{y_1}{k_{NB}}=-\dfrac{3}{2}$ ⑤，

⑤代入③化简得直线 BN 的方程为 $y=k_{BN}\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$，

故直线 BN 过定点 $D\left(-\dfrac{5}{2}，0\right)$.

……………………………………………………（12 分）

另法：注意到 $x=-4$ 是椭圆的准线，可用椭圆第二定义再结合平面几何知识能比较简洁地证明直线 BN 过线段 GF_1 的中点 $D\left(-\dfrac{5}{2}，0\right)$，其中 G 为准线 $x=-4$ 与 x 轴的交点.

21.（本小题满分 12 分）

（1）证明：∵ $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$，

∴ $f'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$，$f''(x)=-\sin x+x$，$f'''(x)=1-\cos x\geqslant 0$，

∴ $f''(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上单增，$f''(x)\geqslant f''(0)=0$，

∴ $f'(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上单增，$f'(x)\geqslant f'(0)=0$，

∴ $f(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上单增，$f(x)\geqslant f(0)=0$，

即当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$. ……………………………………（6 分）

（2）解：∵ $g'(x)=x\sin x-2\sin x+2x-x^2-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{6}$

$=\sin x(x-2)-x(x-2)+\dfrac{x^3}{6}(x-2)$

$=(x-2)\left(\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}\right)$，

由（1）知当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}\geqslant 0$ (当且仅当 $x=0$ 时取“=”)，

则当 $x>0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=2$；

令 $g'(x)>0$，得 $x>2$，$g(x)$ 在 $(2，+\infty)$ 上单增；

令 $g'(x)<0$，得 $0<x<2$，$g(x)$ 在 $(0，2)$ 上单减，

$\therefore g(x)_{\min}=g(2)=\sin 2+\dfrac{16}{15}$.

……………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

……………………………………………………（4 分）

（2）将射线 l_1，l_2 的极坐标方程 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$，$\theta=\dfrac{5\pi}{12}$ 分别与曲线 C 的极坐标方程 $\rho=2\cos\theta$ 联立，得点 A，B 的极坐标分别为 $A\left(2\cos\dfrac{\pi}{12}，\dfrac{\pi}{12}\right)$，$B\left(2\cos\dfrac{5\pi}{12}，\dfrac{5\pi}{12}\right)$，

则由极径和极角的几何意义知：

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\bullet 2\cos\frac{\pi}{12}\bullet 2\cos\frac{5\pi}{12}\bullet\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=2\cos\frac{\pi}{12}\bullet\sin\frac{\pi}{12}\bullet\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}\bullet\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

由余弦定理知：$|AB|=\sqrt{\left(2\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^2+\left(2\cos\dfrac{5\pi}{12}\right)^2-2\bullet 2\cos\dfrac{\pi}{12}\bullet 2\cos\dfrac{5\pi}{12}\bullet\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}\right)}$

$$=\sqrt{\left(2\cos\frac{\pi}{12}\right)^2+\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right)^2-4\bullet\left(2\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}.$$

……………………………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

（1）解：由绝对值的意义可知：原不等式$\Leftrightarrow x^2-3x-4<0 \Leftrightarrow -1<x<4$，

∴原不等式的解集为$\{x\mid -1<x<4\}$.

…………………………………………………………（4 分）

（2）证明：原不等式$\Leftrightarrow -2\sqrt{ab}\leqslant c-3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow c+2\sqrt{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

∵$c+2\sqrt{ab}=c+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{c\sqrt{ab}\sqrt{ab}}=3\sqrt[3]{abc}$，

当且仅当$c=\sqrt{ab}$时取“$=$”,

所以原不等式成立.

……………………………………………………………（10 分）