理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	C	C	D	A	A	C	D	B	C	D

【解析】

1．$B=\{x\mid \ln x\geqslant 1\}=\{x\mid x\geqslant \mathrm{e}\}$，则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=[2,\ \mathrm{e})$，故选 B．

2．设 $z=x+y\mathrm{i}(x,\ y\in\mathbf{R})$，由 $2z+\bar{z}=3+\mathrm{i}$，得 $3x+y\mathrm{i}=3+\mathrm{i}$，所以 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

所以复数 $\dfrac{1}{z}$ 在复平面内对应的点为 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，即复数 z 在复平面上对应的点位于第四象限，故选 B．

3．根据平移变换不改变向量的长度和方向，故选 C．

4．∵若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 5 的奇函数，∴ $f(-x)=-f(x)$，$f(x+5)=f(x)$，∴ $f(-12)=-f(12)=-f(2)=-2$，$f(4)=f(-1)=-f(1)=-1$，∴ $f(-12)-f(4)=-2-(-1)=-1$，故选 C．

5．基本事件总数为 C_{10}^3，所取的 3 个球中没有 1 个红球的基本事件为 C_6^3，所求概率为 $1-\dfrac{\mathrm{C}_6^3}{\mathrm{C}_{10}^3}=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$，故选 D．

6．B 选项中，还可以是 α 与 β 相交，B 错误；C 选项中，m 和 n 还可以是异面直线，C 错误；D 选项中，还可以是 $l\subset\alpha$，D 错误，故选 A．

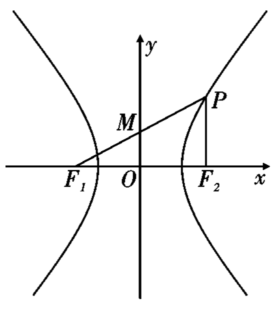

图 1

7．设线段 PF_1 的中点为 M，连接 OM，PF_2．∵线段 PF_1 的中点 M 坐标为 $(0,\ b)$，∴点 P 在双曲线 C 的右支上．如图 1 所示：∵原点 O 为线段 F_1F_2 的中点，∴ $OM\ \underline{\underline{/\!/}}\ \dfrac{1}{2}PF_2$，即 $PF_2\perp F_1F_2$，$|PF_2|=2|OM|=2b$．由双曲线的定义可知，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，即 $|PF_1|=2a+2b$，$|F_1F_2|=2c$，在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2P$ 中，$|PF_1|^2=|PF_2|^2+|F_1F_2|^2$，即 $(2a+2b)^2=(2b)^2+(2c)^2$，整理得 $b=2a$，$\dfrac{b}{a}=2$，故选 A．

8．$\because f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\omega}{2}x\right)=2\cos\frac{\omega}{2}x\sin\frac{\omega}{2}x=\sin\omega x$，由“函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增”，可得：$0<\omega\leqslant\frac{3}{4}\Rightarrow 0<\omega\leqslant 2$，故选 C.

9．函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx+9$ 在 $\mathbf{R}$ 上无极值 $\Leftrightarrow f'(x)=x^2-2mx+m$ 在 $\mathbf{R}$ 上无变号零点 $\Leftrightarrow \Delta=4m^2-4m\leqslant 0\Leftrightarrow 0\leqslant m\leqslant 1$，故选 D.

10．由题设和抛物线定义知：$\dfrac{S_{\triangle ABB_1}}{S_{\triangle ABA_1}}=\dfrac{\frac{1}{2}|BB_1||A_1B_1|}{\frac{1}{2}|AA_1||A_1B_1|}=\dfrac{|BB_1|}{|AA_1|}=\dfrac{|BF|}{|AF|}=4$，设直线 AB 的倾斜角为 α，则 $|AF|=\frac{2}{1+\cos\alpha}$，$|BF|=\frac{2}{1-\cos\alpha}$，所以 $\frac{8}{1+\cos\alpha}=\frac{2}{1-\cos\alpha}$，解得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{4}{3}$，故选 B.

11．$\because \dfrac{\ln a}{\ln b}=\dfrac{2022\ln 2020}{2021\ln 2021}=\dfrac{\frac{\ln 2020}{2021}}{\frac{\ln 2021}{2022}}$，构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}(x\geqslant \mathrm{e}^2)$，$f'(x)=\frac{(x+1)-x\ln x}{x(x+1)^2}$，令 $g(x)=(x+1)-x\ln x$，则 $g'(x)=-\ln x<0$，$\therefore g(x)$ 在 $[\mathrm{e}^2,\ +\infty)$ 上单减，$\therefore g(x)\leqslant g(\mathrm{e}^2)=1-\mathrm{e}^2<0$，故 $f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $[\mathrm{e}^2,\ +\infty)$ 上单减，$\therefore f(2020)>f(2021)>0\Rightarrow \dfrac{\ln a}{\ln b}=\dfrac{\frac{\ln 2020}{2021}}{\frac{\ln 2021}{2022}}=\dfrac{f(2020)}{f(2021)}>1\Rightarrow \ln a>\ln b\Rightarrow a>b$，同理可得 $\ln b>\ln c\Rightarrow b>c$，故 $a>b>c$，故选 C.

12．如图 2，10 个半径为 1 的小球放进棱长为 a 的正四面体 $ABCD$ 中，成三棱锥形状，有 3 层，则从上到下每层的小球个数依次为：1，$(1+2)$，$(1+2+3)$ 个，当 a 取最小值时，从上到下每层放在边缘的小球都与正四面体的侧面相切，底层的每个球都与正四面体底面相切，任意相邻的两个小球都外切，位于每层正三角状顶点的所有上下相邻小球的球心连线为一个正四面体 $EFGH$，则该正四面体的棱长为 $(3-1)(1+1)=4$，可求得其高为 $EP=4\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，所以正四面体 $ABCD$ 的高为 $AQ=AE+EP+PQ=1\times 3+\frac{4\sqrt{6}}{3}+1=4+\frac{4\sqrt{6}}{3}$，进而可求得其棱长 a 的最小值为 $4+2\sqrt{6}$，故选 D.

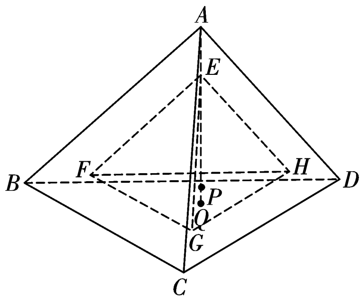

图 2

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	-160	$\left(\dfrac{\pi-2}{4},\ 0\right)$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\dfrac{6\sqrt{3}}{17}$

【解析】

13．$\because T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r=\mathrm{C}_6^r(-2)^r x^{12-3r}(r=0，1，2，3，4，5，6)$，令$12-3r=3\Rightarrow r=3$，即得 x^3 的系数为$\mathrm{C}_6^3(-2)^3=-160$．

14．因为△ABC 是直角三角形，所以其垂心为直角顶点$C(m,\ 0)$，其外心为斜边 AB 的中点 M，故△ABC 的“欧拉线”即为直线 MC，由题设知直线 MC 即为正切曲线 $y=\tan x$ 以点 $D\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$为切点的切线，又点 $D\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$在斜边 AB 上，故△ABC 的外心 M 即为点 $D\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$，又可得切线斜率 $k=(\tan x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}}=2$，故其“欧拉线”的方程为 $y-1=2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，令 $y=0\Rightarrow m=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$，$\therefore C\left(\dfrac{\pi-2}{4},\ 0\right)$．

15．法一：由三角形的射影定理知：$b=c\cos A+a\cos C$，又知$b=c\cos A$，$\therefore \cos C=0\Rightarrow C=\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow A=\dfrac{\pi}{2}-B$，又知 $a=b\cos A$，由正弦定理得：$\sin A=\sin B\cos A\Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)=\sin B\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)\Rightarrow \cos B=\sin^2 B\Rightarrow \cos^2 B+\cos B-1=0\Rightarrow \cos B=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．

法二：由正、余弦定理再结合题设求得$\cos B=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．

16．如图 3，由入射角等于反射角原理知：分别顺次以正六边形的 BC，CD_1，D_1E_1，E_1F_1，F_1A_1 边为对称轴作 5 次对称变换后可知，小球的运行轨迹即为线段 PR，过 R 作直线 AB 的垂线 RS，垂足为 S，则由题设易知：$RS=6\sqrt{3}$，$PS=17$，故 $\tan\theta=\tan\angle BPQ=\dfrac{RS}{PS}=\dfrac{6\sqrt{3}}{17}$．

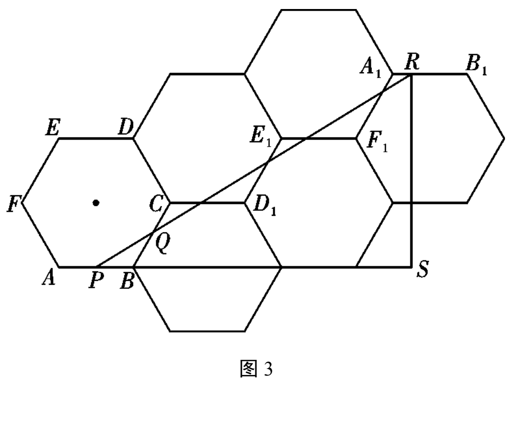

图 3

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

（1）证明：因为 $2a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n=\frac{n+1}{n}a_n$， $n\in\mathbf{N}^*$，

所以，$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{2n}$， $n\in\mathbf{N}^*$．

又 $\frac{a_1}{1}=1\neq 0$，所以 $\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}}=\frac{1}{2}$，

故数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等比数列，首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$．

所以 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$，故 $a_n=\frac{n}{2^{n-1}}$．

…………………………………………………………（6 分）

（2）解：$\because S_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$ ①，

$\therefore \frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$ ②，

①、②式错位相减得：

$$\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n},$$

$\therefore S_n=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^{n-1}}$．　　　　………………………………………………（12 分）

18.（本小题满分 12 分）

（1）证明：因为 $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C， $C_1B\subset$ 平面 BB_1C_1C，

所以 $AB\perp C_1B$．

在 $\triangle BCC_1$ 中， $BC=1$， $BC_1=\sqrt{3}$， $CC_1=2$，

所以 $BC^2+BC_1^2=CC_1^2$．

所以 $CB\perp C_1B$．

因为 $AB\cap BC=B$，AB，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $C_1B\perp$ 平面 ABC.

……………………………………………………………………（4 分）

（2）解：由（1）知，$AB\perp C_1B$，$BC\perp C_1B$，$AB\perp BC$，

如图 4，以 B 为原点建立空间直角坐标系 $B-xyz$.

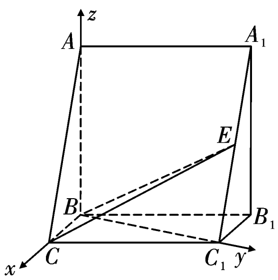

图 4

则 $B(0,\ 0,\ 0)$，$A(0,\ 0,\ 2)$，$E\left(-\dfrac{1}{2},\ \sqrt{3},\ 1\right)$，$C(1,\ 0,\ 0)$.

$\overrightarrow{BC}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \sqrt{3},\ 1\right)$.

设平面 BCE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x=0,\\ -\dfrac{1}{2}x+\sqrt{3}y+z=0.\end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}$，则 $x=0$，$z=-3$，

所以 $\boldsymbol{n}=(0,\ \sqrt{3},\ -3)$.

又因为 $\overrightarrow{AC}=(1,\ 0,\ -2)$，

故点 A 到平面 BCE 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1\times0+0\times\sqrt{3}+(-2)\times(-3)|}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

……………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）每道题的抢答中，记甲得一分为事件 M.

M 发生有两种可能：抢到题且答对，乙抢到题且答错，

$\therefore P(M)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{5}$，

$\therefore$ 比赛开始，甲率先得一分的概率为 $\dfrac{2}{5}$.　　　…………………………………（4 分）

（2）由（1）知，在每道题的抢答中甲、乙得一分的概率分别为$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，

设两人共抢答了 X 道题比赛结束，且甲获胜.

根据比赛规则，X 的所有可能取值分别为 3，4，5，

则 $P(X=3)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$，

$P(X=4)=C_3^1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{72}{625}$，

$P(X=5)=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{432}{3125}$，

则甲获胜的概率 $P=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{992}{3125}$. ………………（9 分）

（3）由（1）（2）知改变规则后甲获胜的概率

$P_1=P(X=2)+P(X=3)=\left(\frac{2}{5}\right)^2+C_2^1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{44}{125}=\frac{1100}{3125}$，

而$\frac{1100}{3125}>\frac{992}{3125}$，

即 $P_1>P$ 此时甲获胜的概率更大了，对甲更有利. ……………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

（1）解：由椭圆定义知：$2a=|MF_1|+|MF_2|=\sqrt{(1-(-1))^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}+\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}=4$，

所以 $a=2$，又 $c=1$，

$\therefore b^2=3$，因此椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………（4 分）

（2）证明：设直线 l 的方程为 $x=my-1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$N(-4,y_1)$，

由$\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 x，整理得：$(4+3m^2)y^2-6my-9=0$，

所以 $y_1+y_2=\frac{6m}{4+3m^2}$ ①，$y_1y_2=\frac{-9}{4+3m^2}$ ②，

又 $N(-4, y_1)$，所以直线 BN 的方程为 $y-y_1=k_{BN}(x+4)$，

即 $y=k_{BN}\left(x+4+\dfrac{y_1}{k_{BN}}\right)$③，

又 $k_{BN}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+4}=\dfrac{y_2-y_1}{(my_2-1)+4}=\dfrac{y_2-y_1}{my_2+3}$，

所以 $\dfrac{y_1}{k_{BN}}=\dfrac{y_1(my_2+3)}{y_2-y_1}=\dfrac{my_1y_2+3y_1}{y_1+y_2-2y_1}$④，

将①、②式代入④式化简得：$\dfrac{y_1}{k_{NB}}=-\dfrac{3}{2}$⑤，

⑤代入③化简得直线 BN 的方程为 $y=k_{BN}\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$，

故直线 BN 过定点 $D\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right)$. ……………………………………………（12 分）

另法：注意到 $x=-4$ 是椭圆的准线，可用椭圆第二定义再结合平面几何知识能比较简洁地证明直线 BN 过线段 GF_1 的中点 $D\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right)$，其中 G 为准线 $x=-4$ 与 x 轴的交点.

21.（本小题满分 12 分）

证明：（1）∵ $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$，

∴ $f'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$， $f''(x)=-\sin x+x$， $f'''(x)=1-\cos x\geqslant 0$，

∴ $f''(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增， $f''(x)\geqslant f''(0)=0$，

∴ $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增，

∴ $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增， $f(x)\geqslant f(0)=0$，

即当 $x\geqslant 0$ 时， $f(x)\geqslant 0$. ……………………………………………（6 分）

（2）由（1）的结果知：当 $x\geqslant 0$ 时，

$f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}\geqslant 0$（当且仅当 $x=0$ 时取“=”），

∴ $g(x)\geqslant h(x)=\sin x+2\cos x-x\cos x+x^2-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^5}{30}$（当且仅当 $x=0$ 时取“＝”），

∵ $h'(x)=x\sin x-2\sin x+2x-x^2-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{6}$

$=\sin x(x-2)-x(x-2)+\dfrac{x^3}{6}(x-2)$

$=(x-2)\left(\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}\right)$，

再由（1）的结果知：当 $x>0$ 时，

$f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}>0$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=2$；

令 $h'(x)>0$，得 $x>2$，$h(x)$ 在 $(2，+\infty)$ 上单增；

令 $h'(x)<0$，得 $0<x<2$，$h(x)$ 在 $(0，2)$ 上单减，

$\therefore h(x)_{\min}=h(2)=\sin 2+\dfrac{16}{15}$，

$\therefore h(x)\geqslant\sin 2+\dfrac{16}{15}$ (当且仅当 $x=2$ 时取“=”)，

$\therefore g(x)\geqslant h(x)\geqslant\sin 2+\dfrac{16}{15}$，由于两个不等式取“=”条件不一致，

$\therefore g(x)>\sin 2+\dfrac{16}{15}$，

又 $\sin 2>\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{4}{5}$，

故当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)>\dfrac{4}{5}+\dfrac{16}{15}=\dfrac{28}{15}$. ………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. ………………………………………（4 分）

（2）将射线 l_1，l_2 的极坐标方程 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$，$\theta=\dfrac{5\pi}{12}$ 分别与曲线 C 的极坐标方程 $\rho=2\cos\theta$ 联立，得点 A，B 的极坐标分别为 $A\left(2\cos\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{\pi}{12}\right)$，$B\left(2\cos\dfrac{5\pi}{12},\ \dfrac{5\pi}{12}\right)$，

则由极径和极角的几何意义知：

$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos\dfrac{\pi}{12}\cdot 2\cos\dfrac{5\pi}{12}\cdot\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}\right)$

$=2\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$

$=\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

由余弦定理知：$|AB|=\sqrt{\left(2\cos\frac{\pi}{12}\right)^2+\left(2\cos\frac{5\pi}{12}\right)^2-2\cdot 2\cos\frac{\pi}{12}\cdot 2\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)}$

$=\sqrt{\left(2\cos\frac{\pi}{12}\right)^2+\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right)^2-4\cdot\left(2\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$.

…………………………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

（1）解：由绝对值的意义可知：原不等式 $\Leftrightarrow x^2-3x-4<0\Leftrightarrow -1<x<4$ ，

∴原不等式的解集为 $\{x\mid -1<x<4\}$.　　　　……………………………………………（4 分）

（2）证明：原不等式 $\Leftrightarrow -2\sqrt{ab}\leqslant c-3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow c+2\sqrt{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

∵ $c+2\sqrt{ab}=c+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{c\sqrt{ab}\sqrt{ab}}=3\sqrt[3]{abc}$ ，

当且仅当 $c=\sqrt{ab}$ 时取“ = ”,

所以原不等式成立.　　　　…………………………………………………（10 分）