昆明市 2020~2021 学年高二期末质量检测

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	A	C	D	C	C	B	A	B	A	D

二、填空题

13．$(2,-1)$（满足条件的 $\boldsymbol{a}$ 均可）　　14．80　　15．$2\sqrt{2}$　　16．$[\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12})$

三、解答题

17．解：（1）由频率分布直方图可知该公司员工年收入的众数为10 万元.　………1 分

由于 $(0.04+0.1)\times 5=0.7>0.5$，所以员工年收入的中位数在 $[7.5,12.5)$ 内，设中位数为 a，

由 $0.04\times 5+0.1\times(a-7.5)=0.5$，解得 $a=10.5$，

所以估计该该公司员工年收入的中位数约为10.5 万元.　………………… 3 分

由题意知，员工年收入的平均数为：

$(0.04\times 5+0.1\times 10+0.02\times 15+0.01\times 20+0.01\times 25+0.008\times 30+0.008\times 35+0.004\times 40)\times 5$
$=13.15$，

所以估计该公司员工年收入的平均数约为13.15 万元.　…………………5 分

（2）招聘人员的描述不能客观反映该公司员工年收入的实际情况.　………………7 分

由（1）知，有一半员工年收入不超过10.5 万元，多数员工年收入是10 万元，少数员工年收入很高，在这种情况下，年收入的平均数就比中位数大的多，所以用中位数或众数更能客观反映该公司员工年收入的实际情况.　…………………10 分

18．解：（1）选① $a_{n+1}-a_n=2$，$S_3=9$；

$a_{n+1}-a_n=2$，知数列 $\{a_n\}$ 是公差 $d=2$ 的等差数列，………………………2 分

则 $S_3=3a_1+\frac{1}{2}\times 3\times 2\times d=3a_1+6=9$，得 $a_1=1$，　…………………………4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$．…………………………6 分

选② $a_n=(S_2-2)n-1$；

$a_n=(S_2-2)n-1$，知 $a_1=(S_2-2)-1=a_1+a_2-3$，得 $a_2=3$，………………2 分

$a_2=2(S_2-2)-1=2a_1+2a_2-5$，得 $a_1=1$，即 $S_2=a_1+a_2=4$，………………4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(S_2-2)n-1=2n-1$.………………………6 分

选③ $\sqrt{S_n}=n$；

$\sqrt{S_n}=n$，得 $S_n=n^2$，…………………………………………2 分

则 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\ge 2.\end{cases}$ 所以 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2n-1, & n\ge 2.\end{cases}$　…………………………4 分

因为 $a_1=1=2\times 1-1$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$．…………………6 分

（2）因为 $a_n=2n-1$，所以 $b_n+b_{n+1}=2^{\frac{a_n-1}{2}}=2^{n-1}$，…………………………………7 分

则 $b_1+b_2=1$， $b_3+b_4=2^2$， $b_5+b_6=2^4$， $b_7+b_8=2^6$， $b_9+b_{10}=2^8$，……………10 分

数列 $\{b_n\}$ 的前10项和为：

$T_{10}=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+(b_5+b_6)+(b_7+b_8)+(b_9+b_{10})=1+2^2+2^4+2^6+2^8=341$. …12 分

19．解：（1）由题，点 A 到 BC 边的距离为 $8\sin 60°=4\sqrt{3}$，所以 $6<4\sqrt{3}<AD<8$，

又线段 AD 的长度为整数，所以 $AD=7$， ………………3 分

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理： $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\times BD\times\cos B$，

即 $49=64+BD^2-8BD$，解得 $BD=5$ 或 3. …………………………………6 分

（2）解法一：

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理： $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AD}{\sin 60°}$，

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理： $\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin 60°}$，所以 $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$，

即 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=3$，因为 $BD+CD=8$，所以 $BD=6$，……………………9 分

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理：

$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\times BD\times\cos 60°=64+36-48=52$，

所以 $AD=2\sqrt{13}$，所以 $\cos\angle BAD=\dfrac{64+52-36}{2\times 8\times 2\sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$. ………………………12 分

解法二：设 $\angle BAD=\alpha$，则 $\angle CAD=60°-\alpha$，

由题 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(60°-\alpha)}=3$，

所以 $\sin\alpha=3\sin 60°\cos\alpha-3\cos 60°\sin\alpha$， $5\sin\alpha=3\sqrt{3}\cos\alpha$，

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=\dfrac{25}{52}$，

又 α 是锐角，所以 $\cos\alpha=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$.

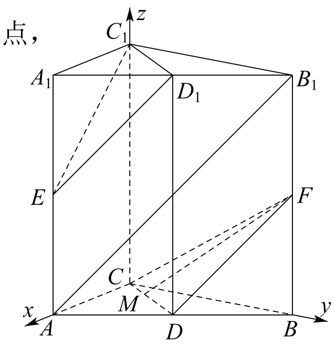
20．解：（1）证明：连结 AB_1，DD_1，

由 D，E，F，D_1 分别为棱 AB，AA_1，BB_1，A_1B_1 的中点，

所以 $DF // AB_1$，$ED_1 // AB_1$，故 $DF // ED_1$，

又 $DF \not\subset$ 平面 EC_1D_1，所以 $DF //$ 平面 EC_1D_1，　……2 分

因为 $DD_1 // AA_1$，$CC_1 // AA_1$，所以 $DD_1 // CC_1$，



又因为 $DD_1 = AA_1$，$CC_1 = AA_1$，所以 $DD_1 = CC_1$，

所以四边形 CDD_1C_1 为平行四边形，

所以 $CD // C_1D_1$，又 $CD \not\subset$ 平面 EC_1D_1，$C_1D_1 \subset$ 平面 EC_1D_1，

所以 $CD //$ 平面 EC_1D_1.　………………………………4 分

又 $DF \cap CD = D$，所以平面 $CDF //$ 平面 EC_1D_1，

又 $MF \subset$ 平面 CDF，所以 $MF //$ 平面 EC_1D_1.　………………………………………6 分

（2）在直三棱柱中，$CC_1 \perp$ 平面 ABC，所以 $CC_1 \perp AC$，$CC_1 \perp BC$，由题 $AC \perp BC$，故可建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$，　………………………………………………7 分

设 $AC = 2a$，$a > 0$，由 $AC = BC$，$AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AA_1$，$D$ 为 AB 中点，

所以 $C(0,0,0)$，$D(a,a,0)$，$F(0,2a,\sqrt{2}a)$，

所以 $\overrightarrow{CD} = (a,a,0)$，$\overrightarrow{CF} = (0,2a,\sqrt{2}a)$，

设平面 CDF 的法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \vec{m} \perp \overrightarrow{CD}, \\ \vec{m} \perp \overrightarrow{CF}, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} ax + ay = 0, \\ 2ay + \sqrt{2}az = 0, \end{cases}$ 取 $y = -1$，得 $x = 1$，$z = \sqrt{2}$，$\vec{m} = (1,-1,\sqrt{2})$，

平面 BCF 即平面 yCz，它的一个法向量为 $\vec{n} = (1,0,0)$.　……………………………10 分

设二面角 $B-CF-D$ 的大小为 θ，由题知 θ 为锐角，

所以 $\cos\theta = \dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{|1\times1+(-1)\times0+\sqrt{2}\times0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}\times1} = \dfrac{1}{2}$，所以 $\theta = 60°$，

所以二面角 $B-CF-D$ 的大小为 $60°$.　………………………………………………12 分

21．解：（1）依题意可得：$\begin{cases} \sqrt{1-(\dfrac{b}{a})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ 2ab = 2\sqrt{2}, \end{cases}$　………………………………………………2 分

解得 $a = \sqrt{2}$，$b = 1$，

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$.　………………………………………………5 分

（2）由题可知：直线l的斜率存在且不为零，故设直线l的方程为$x=ty-2$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由（1）可知：$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，

则$\overrightarrow{F_1A}=(x_1+1,y_1)$，$\overrightarrow{F_2B}=(x_2-1,y_2)$，

因为$\overrightarrow{F_1A}//\overrightarrow{F_2B}$，所以$(x_1+1)y_2=(x_2-1)y_1$，$y_1\neq 0$，$y_2\neq 0$，化简得$y_2=3y_1$，

所以$y_1+y_2=4y_1$，$y_1\cdot y_2=3y_1^2$，得$(y_1+y_2)^2=\dfrac{16(y_1\cdot y_2)}{3}$，　…………………………7 分

联立$\begin{cases}x=ty-2,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$消去$x$得，$(t^2+2)y^2-4ty+2=0$，由$\Delta>0$得$t^2>2$，

$y_1+y_2=\dfrac{4t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{2}{t^2+2}$，…………………………………………………………9 分

则$\dfrac{16t^2}{(t^2+2)^2}=\dfrac{16}{3}\dfrac{2}{t^2+2}$，解得$t=2$或$t=-2$，

故l的斜率为$\dfrac{1}{2}$或$-\dfrac{1}{2}$.　………………………………………………12 分

22．解：（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

当$a=1$时，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x^2}$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{x^2-2}{x^3}=\dfrac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x^3}$，…………2 分

由$f'(x)>0$得，$x>\sqrt{2}$，$f(x)$的增区间为$(\sqrt{2},+\infty)$，

由$f'(x)<0$得，$0<x<\sqrt{2}$，$f(x)$的减区间为$(0,\sqrt{2})$.　……………………………4 分

（2）由题$e^x+\dfrac{1}{x^2}\geq f(x)$恒成立，即$e^x-a\ln(ax)\geq 0$恒成立.

令$g(x)=e^x-a\ln(ax)$，则$g'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}$，

令$h(x)=e^x-\dfrac{a}{x}$，则$h'(x)=e^x+\dfrac{a}{x^2}>0$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增.

因为$e^a>1$，所以$0<\dfrac{a}{e^a}<a$，则$h(\dfrac{a}{e^a})=e^{\frac{a}{e^a}}-\dfrac{a}{\frac{a}{e^a}}=e^{\frac{a}{e^a}}-e^a<0$，又$h(a)=e^a-1>0$，

所以$\exists x_0\in(\dfrac{a}{e^a},a)$，使$h(x_0)=0$，所以$g'(x_0)=0$，即$e^{x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$，………………6 分

当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减;

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

所以$g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-a\ln(ax_0)=\dfrac{a}{x_0}+ax_0-2a\ln a\geq 0$，即$x_0+\dfrac{1}{x_0}\geq 2\ln a$恒成立，

又因为$x_0+\dfrac{1}{x_0}\geq 2$，所以$2\ln a\leq 2$，所以$a\leq e$，

当且仅当$x_0=1$，$a=e$时，等号成立，

所以a的取值范围为$(0,e]$.　…………………………12 分