昆八中 2021-2022 学年度下学期月考一

平行高二数学试卷答案

考试时间：150 分钟 满分：150 分

命题教师：饶 艳 审题教师：白 莹

一、单选题（本大题共**8**小题，共**40.0**分）

1. 已知等差数列$\{a\_{n}\}$的公差为$2$，若$a\_{1}$，$a\_{3}$，$a\_{4}$成等比数列，则$a\_{2}$等于$($   $)$

A. $–4$ B. $–6$ C. $–8$ D. $–10$

【答案】*B*

解：由题意得，在等差数列$\{a\_{n}\}$中，$a\_{3}=a\_{1}+4,a\_{4}=a\_{1}+6$，

$∵a\_{1},a\_{3},a\_{4}$成等比数列，$∴a\_{3}^{2}=a\_{1}a\_{4}$，即$(a\_{1}+4)^{2}=a\_{1}(a\_{1}+6)$，

解得$a\_{1}=−8$．$∴a\_{2}=a\_{1}+d=−8+2=−6$，故选*B*．

1. 函数$f(x)=x^{3}−7x^{2}+1$的图象在点$(4,f(4))$处的切线的斜率为$(    )$

A. $−5$ B. $−6$ C. $−7$ D. $−8$

【答案】*D*

解：$f(x)=x^{3}−7x^{2}+1$的导数为$f′(x)=3x^{2}−14x$，
可得$f(x)$的图象在点$(4,f(4))$处的切线的斜率为$k=3×4^{2}−14×4=−8$．故选：$D$．

1. 如图所示，用$4$种不同的颜色涂入图中的矩形$A$，$B$，$C$，$D$中，要求相邻的矩形涂色不同，则不同的涂法有$(    )$

A. $72$种B. $48$种C. $24$种D. $12$种

【答案】*A*

解：根据题意，首先涂$A$有$C\_{4}^{1}=4$种涂法，则涂$B$有$C\_{3}^{1}=3$种涂法，
$C$与$A$、$B$相邻，则$C$有$C\_{2}^{1}=2$种涂法，$D$只与$C$相邻，则$D$有$C\_{3}^{1}=3$种涂法．
所以，共有$4×3×2×3=72$种涂法，故选*A*．

1. 若函数$f(x)=kx−lnx$在区间$(1,+\infty )$上单调递增，则$k$的取值范围是$($  $)$

A. $(−\infty ,−2]$ B. $(−\infty ,−1]$ C. $[2,+\infty )$ D. $[1,+\infty )$

【答案】*D*

解：$f^{′}(x)=k−\frac{1}{x}$，$∵$函数$f(x)=kx−lnx$在区间$(1,+\infty )$单调递增，
$∴f^{′}(x)\geq 0$在区间$(1,+\infty )$上恒成立．$∴k\geq \frac{1}{x}$在区间$(1,+\infty )$上恒成立，
而$y=\frac{1}{x}$在区间$(1,+\infty )$上单调递减，$∴0<\frac{1}{x}<1$，$∴k\geq 1$．
$∴k$的取值范围是：$[1,+\infty )$．故选*D*．

1. 设等差数列$\{a\_{n}\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，若$a\_{2}=3$，$a\_{4}+a\_{5}=16$，则$S\_{10}=(    )$

A. $60$ B. $80$ C. $90$ D. $100$

【答案】*D*

解：设公差为$d$，则$\left\{\begin{matrix}a\_{2}=a\_{1}+d=3\\a\_{4}+a\_{5}=2a\_{1}+7d=16\end{matrix}\right.⇒\left\{\begin{matrix}a\_{1}=1\\d=2\end{matrix}\right.,$
故$S\_{10}=10a\_{1}+45d=100$．故答案为：$D$．

1. 已知函数$f(x)=e^{x}−ax^{2}(x\in R)$有三个不同的零点，则实数$a$的取值范围是$(    )$

A. $\left(\frac{e}{4},+\infty \right)$ B. $\left(\frac{e}{2},+\infty \right)$ C. $\left(\frac{e^{2}}{4},+\infty \right)$ D. $\left(\frac{e^{2}}{2},+\infty \right)$

【答案】*C*

解：$x=0$时，$f(0)=1\ne 0$，令$f(x)=e^{x}−ax^{2}=0$，得$a=\frac{e^{x}}{x^{2}}$，
令$g(x)=\frac{e^{x}}{x^{2}}$，则问题转化为$y=a$与$g(x)=\frac{e^{x}}{x^{2}}$有三个交点，
$∵g′(x)=\frac{(x−2)e^{x}}{x^{3}}$，令$g′(x)=0$，解得$x=2$，
$∴$当$x<0$或$x>2$时，$g′(x)>0$，$g(x)$在$(−\infty ,0)$，

$(2,+\infty )$单调递增，
当$0<x<2$时，$g′(x)<0$，$g(x)$在$(0,2)$单调递减，
$g(x)$在$x=2$处取极小值，$g(2)=\frac{e^{2}}{4}$，
作出$g(x)$的图象如右：
要使直线$y=a$与曲线$g(x)=\frac{e^{x}}{x^{2}}$有三个交点，则$a>\frac{e^{2}}{4}$，故实数$a$的取值范围是 ．故选*C*．

1. 某高三年级在安排自习辅导时，将$6$位不同学科的老师分配到$5$个不同班级进行学科辅导，每个班级至少一位老师，则所有不同的分配方案的种数为$($      $)$．

A. $3600$ B. $1800$ C. $720$ D. $600$

【答案】*B*

解：第一步将$6$人分为$5$组，每组至少一名，由$C\_{6}^{2}=15($种$)$分法，
第二步将$5$组人分配到$5$个班级，有$A\_{5}^{5}=120($种$)$分配方法，
根据分步计数原理，不同的分配方案总数为$15×120=1800($种$)$．故选择：$B$．

1. 已知函数$f(x)=e^{x}+x^{3}+(a−3)x+1$在区间$(0,1)$上有最小值，则实数$a$的取值范围是$($   $)$

A. $(−e,2)$ B. $(−e,1−e)$ C. $(1,2)$ D. $(−\infty ,1−e)$

【答案】*A*

解：因为$f′(x)=e^{x}+3x^{2}+(a−3)$在区间$(0,1)$上单调递增，
由题意只需$\left\{\begin{matrix}f^{′}(0)<0\\f^{′}(1)>0\end{matrix}\right.⇒\left\{\begin{matrix}a−2<0\\e+a>0\end{matrix}\right.$，解得$−e<a<2$，
这时存在$x\_{0}\in (0,1)$，使得$f(x)$在$(0,x\_{0})$上单调递减，在$(x\_{0},1)$上单调递增，
即函数$f(x)$在$(0,1)$上有极小值也是最小值$f(x\_{0})$，所以$a$的取值范围是$(−e,2)$．故选：$A$．

二、多选题（本大题共**4**小题，共**20.0**分）

1. 现有$2$名女生，$4$名男生排成一排照相，以下说法正确的是$($    $)$

A. $2$名女生相邻的不同排法共有$240$种B. 两名女生不相邻的不同排法共有$480$种
C. 排头、排尾都是男生的不同排法共有$720$种D. $2$名女生相邻的概率为$\frac{1}{3}$

【答案】*ABD*

解：$A.$两名女生的排法有$2$种排法，然后把两个女生捆绑在一起看做一个元素与其他$4$个男生全排列有$5×4×3×2=120$种，$∴$共有排法共$120×2=240$，*A*正确$;$
*B*.先排$4$个男生共$4×3×2=24$排法，再把两个女生插入$5$个空档中的$2$个空中，
$∴$共有排法$24×5×4=480$，*B*正确$;$
*C*.先将排头、排位都是男生的排法有$4×3=12$种，再把其他排进去，
$∴$共有排法$12×4×3×2=288$种，$C$不正确$;$
*D*.由$A$可知，$2$名女生相邻的不同排法共有$240$种，所有的排法有$6×5×4×3×2=720$种，
$∴2$名女生相邻的概率为$\frac{1}{3}$，*D*正确．故选*ABD*．

1. 已知函数$f(x)=−x^{2}lnx$，则$(    )$

A. $f(x)\leq 0$恒成立 B. $f(x)$是$(0,+\infty )$上的减函数
C. $f(x)$在$x=e^{−\frac{1}{2}}$得到极大值$\frac{1}{2e}$ D. $f(x)$只有一个零点

【答案】*CD*

解：函数$f(x)=−x^{2}lnx(x>0)$，则$f′(x)=−2xlnx−x=−x(2lnx+1)$，
令$f′(x)>0$，可得$0<x<e^{−\frac{1}{2}}$，令$f′(x)<0$，可得$x>e^{−\frac{1}{2}}$，
所以$f(x)$在$(0,e^{−\frac{1}{2}})$上单调递增，在$(e^{−\frac{1}{2}},+\infty )$上单调递减，故选项*B*错误；
当$x=e^{−\frac{1}{2}}$时，$f(x)$取得极大值$f(e^{−\frac{1}{2}})=\frac{1}{2e}$，故选项*C*正确；
在区间$(0,+\infty )$内，$f(x)$有唯一的极大值即最大值$f(e^{−\frac{1}{2}})>0$，故选项*A*错误；
因为当$x\rightarrow 0$时，$f(x)\rightarrow 0$，当$x\rightarrow +\infty $时，$f(x)\rightarrow −\infty $，
又$f(\frac{1}{\sqrt{e}})=\frac{1}{2e}>0$，$f(e)=−e^{2}lne=−e^{2}<0$，则$f(\frac{1}{\sqrt{e}})⋅f(e)<0$，
由零点的存在性定理可得，$f(x)$在区间$(\frac{1}{\sqrt{e}},e)$内存在唯一的零点，故选项*D*正确．故答案选：$CD$．

1. 设$S\_{n}$是数列$\{a\_{n}\}$的前$n$项和，$a\_{1}=1$，$a\_{n+1}+S\_{n}S\_{n+1}=0$，则下列说法正确的有$($     $)$

A. 数列$\{a\_{n}\}$的前$n$项和为$S\_{n}=\frac{1}{n}$B. 数列$\{\frac{1}{S\_{n}}\}$为递增数列
C. 数列$\{a\_{n}\}$的通项公式为$a\_{n}=−\frac{1}{n(n−1)}$D. 数列$\{a\_{n}\}$的最大项为$a\_{1}$

【答案】*ABD*

解：由$a\_{n+1}=−S\_{n+1}S\_{n}$，得$S\_{n+1}−S\_{n}=−S\_{n}S\_{n+1}$，即$\frac{1}{S\_{n+1}}−\frac{1}{S\_{n}}=1$，
故$\{\frac{1}{S\_{n}}\}$是首项为$\frac{1}{S\_{1}}=\frac{1}{a\_{1}}=1$，公差为$1$的等差数列，可得$\frac{1}{S\_{n}}=n$，则$S\_{n}=\frac{1}{n}$，故*A*、*B*正确；
当$n\geq 2$时，$a\_{n}=S\_{n}−S\_{n−1}=\frac{1}{n}−\frac{1}{n−1}=−\frac{1}{n(n−1)}$，显然$a\_{1}$不符，
故数列$\{a\_{n}\}$的通项公式为$a\_{n}=\left\{\begin{matrix}1,n=1,\\−\frac{1}{n(n−1)},n⩾2,\end{matrix}\right.$故选项*C*错误；
因为$\frac{1}{n}−\frac{1}{n−1}<1$恒成立，所以数列$\{a\_{n}\}$的最大项为$a\_{1}=1$，故*D*正确．故选：$ABD$．

1. 已知$f(x)$是可导的函数，且$f′(x)<f(x)$，对于$x\in R$恒成立，则下列不等关系正确的是$($  $)$

A. $f(1)<ef(0)$，$f(2020)<e^{2020}f(0)$ B. $f(1)>ef(0)$，$f(1)>e^{2}f(−1)$
C. $f(1)<ef(0)$，$f(1)<e^{2}f(−1)$ D. $f(1)>ef(0)$，$f(2020)>e^{2020}f(0)$

【答案】*AC*

解：设$g(x)=\frac{f(x)}{e^{x}}$，则$g′(x)=\frac{f′(x)−f(x)}{e^{x}}$，$∵f′(x)<f(x)$，
$∴g′(x)<0$，即$g(x)$在$R$上单调递减，$∴g(1)<g(0)$，即$\frac{f(1)}{e}<\frac{f(0)}{e^{0}}$，即$f(1)<ef(0)$，
$g(2020)<g(0)$，即$\frac{f(2020)}{e^{2020}}<\frac{f(0)}{e^{0}}$，即$f(2020)<e^{2020}f(0)$，
$g(1)<g(−1)$，即$\frac{f(1)}{e}<\frac{f(−1)}{e^{−1}}$，即$f(1)<e^{2}f(−1)$．
$∴$选项*A*和*C*正确，选项*B*和$D$均错误．故选：$AC$．

三、填空题（本大题共**4**小题，共**20.0**分）

1. 已知函数$f(x)=2lnx+x$，则曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程为          ．

【答案】$3x−y−2=0($注：写成$y=3x−2$也给分，其它不化简形式不给分$)$

解：$f′(x)=\frac{2}{x}+1$，$f′(1)=3$，$f(1)=1$，故$y=f(x)$在$x=1$处的切线的方程为：$y−1=3(x−1)$，即为$3x−y−2=0$．

1. 若将$6$名教师分到$3$所中学任教，一所$1$名，一所$2$名，一所$3$名，则有          种不同的分法．

【答案】90

解：把$6$名教师分成人数为$2$，$2$，$2$的三组，有$C\_{6}^{2}C\_{4}^{2}C\_{2}^{2}=90$种方法，
故答案为$90$．

1. 已知数列$\{a\_{n}\}$满足$a\_{n+1}=a\_{n}⋅cosnπ+\left(−1\right)^{n+1}(n\in N^{∗})$，则数列$\{a\_{n}\}$的前$2022$项和为          ．

【答案】$1011$

解：$∵$数列$\{a\_{n}\}$满足$a\_{n+1}=cosnπ⋅a\_{n}+(−1)^{n+1}(n\in N^{∗})$，$∴a\_{2}=−a\_{1}+1$，
$a\_{3}=a\_{2}−1=−a\_{1}$，$a\_{4}=−a\_{3}+1=a\_{1}+1$，$a\_{5}=a\_{4}−1=a\_{1}$，$a\_{6}=−a\_{5}+1=−a\_{1}+1$．
$∴$数列$\{a\_{n}\}$是以$4$为周期的周期数列，且$2022=4×505+2$，
所以$S\_{2022}=505×[a\_{1}+(−a\_{1}+1)+(−a\_{1})+(a\_{1}+1)]+a\_{1}+(−a\_{1}+1)=1011$，
故答案为：$1011$．

1. 丹麦数学家琴生$(Jensen)$是$19$世纪对数学分析做出卓越贡献的巨人，特别是在函数的凸凹性与不等式方面留下了很多宝贵的成果，设函数$f(x)$在$(a,b)$上的导函数为$f′(x)$，$f′(x)$在$(a,b)$上的导函数为$f′′(x)$，若在$(a,b)$上$f′′(x)<0$恒成立，则称函数$f(x)$在$(a,b)$上为“凸函数”，已知$f(x)=\frac{x^{4}}{4}−\frac{t}{3}x^{3}+\frac{3}{2}x^{2}$在$(1,4)$上为“凸函数”，则实数$t$的取值范围是          ．

【答案】$[\frac{51}{8},+\infty )$

解：$∵f(x)=\frac{ x^{4}}{4}−\frac{t}{3}x^{3}+\frac{3}{2}x^{2}$，$∴f^{′}(x)=x^{3}−tx^{2}+3x$，$∴f^{″}(x)=3x^{2}−2tx+3$，
$∵f(x)=\frac{ x^{4}}{4}−\frac{t}{3}x^{3}+\frac{3}{2}x^{2}$在$(1,4)$上为“凸函数”，$∴f″(x)=3x^{2}−2tx+3<0$在$(1,4)$上恒成立，
$∴t>\frac{3}{2}(x+\frac{1}{x})$，易知$y=x+\frac{1}{x}$在$(1,4)$上为增函数，$∴y<4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$，$∴t\geq \frac{51}{8}$，
故答案为：$[\frac{51}{8},+\infty )$．

四、解答题（本大题共**6**小题，共**72.0**分）

1. $△ABC$在内角$A$、$B$、$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，已知$a=bcosC+csinB$．
$($Ⅰ$)$求$B$；$($Ⅱ$)$若$b=2$，求$△ABC$面积的最大值．

【答案】解：$($Ⅰ$)$由已知及正弦定理得：$sinA=sinBcosC+sinBsinC①$，
$∵sinA=sin(B+C)=sinBcosC+cosBsinC②$，
又由$C$为三角形内角得$sinC>0$，$∴sinB=cosB$，即$tanB=1$，
$∵B$为三角形的内角，$∴B=\frac{π}{4}$；
$($Ⅱ$)S\_{△ABC}=\frac{1}{2}acsinB=\frac{\sqrt{2}}{4}ac$，
由已知及余弦定理得：$4=a^{2}+c^{2}−2accos\frac{π}{4}\geq 2ac−2ac×\frac{\sqrt{2}}{2}$，
整理得：$ac\leq \frac{4}{2−\sqrt{2}}$，当且仅当$a=c$时，等号成立，
则$△ABC$面积的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{4}×\frac{4}{2−\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$．

1. 已知公差不为$0$的等差数列$\{a\_{n}\}$满足$a\_{1}=1$，且$a\_{1}$，$a\_{2}$，$a\_{5}$成等比数列．
$($Ⅰ$)$求数列$\{a\_{n}\}$的通项公式；
$($Ⅱ$)$若$b\_{n}=2^{n−1}$，求数列$\{a\_{n}⋅b\_{n}\}$的前$n$项和$T\_{n}$．

【答案】解：$($Ⅰ$)$设数列$\{a\_{n}\}$的公差为$d(d\ne 0)$，
由题设可得：$a\_{2}^{2}=a\_{1}a\_{5}$，即$(1+d)^{2}=1+4d$，解得：$d=2$，
$∴a\_{n}=1+2(n−1)=2n−1$；
$($Ⅱ$)$由$($Ⅰ$)$可得：$a\_{n}b\_{n}=(2n−1)⋅2^{n−1}$，
$∴T\_{n}=1×2^{0}+3×2^{1}+5×2^{2}+…+(2n−1)⋅2^{n−1}$，
又$2T\_{n}=1×2^{1}+3×2^{2}+…+(2n−3)⋅2^{n−1}+(2n−1)⋅2^{n}$，
两式相减得：$−T\_{n}=1+2^{2}+2^{3}+…+2^{n}−(2n−1)⋅2^{n}=1+\frac{2^{2}(1−2^{n−1})}{1−2}−(2n−1)⋅2^{n}$，
整理得：$T\_{n}=(2n−3)⋅2^{n}+3$．

1. 如图，点$C$是以$AB$为直径的圆上的动点$($异于$A$，$B)$，已知$AB=2$，$AC=\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{7}$，四边形$BEDC$为矩形，平面$ABC⊥$平面$BEDC.$设平面$EAD$与平面$ABC$的交线为$l$．
$(1)$证明：$l//BC$；
$(2)$求平面$ADE$与平面$ABC$所成的锐二面角的余弦值．



|  |
| --- |
|  |

【答案】解：$(1)$证明：四边形$BEDC$为矩形，$∴DE//BC$，$∴DE//$平面$ABC$，
又$∵DE⊂$平面$ADE$，平面$ADE∩$平面$ABC=l$，$∴l//BC$．$(2)$
解：过$A$作$AM//CB$交圆于点$M$，连接$BM$，$EM$，
$∵$四边形$AMBC$为矩形，$∴AM//BC//DE$，即平面$ADE$与平面$AMED$为同一平面，
$∵$平面$ABC⊥$平面$BEDC$，平面$ABC∩$平面$BEDC=BC$，$BE⊂$平面$BEDC$，$BE⊥BC$，
$∴BE⊥$平面$ABC$，$∴BE⊥AM$，
又$∵AM⊥BM$，$BE∩BM=B$，
$∴AM⊥$平面$BEM$，$∴AM⊥EM$，$∵$平面$ADE∩$平面$ABC=AM$，
$∴∠EMB$即为平面$ADE$与平面$ABC$所成的锐二面角的平面角，
$∵AE=\sqrt{7}$，$AB=2$，$∴BE^{2}=\sqrt{7−4}=3$，$BM=AC=\sqrt{2}$，$∴EM=\sqrt{5}$，
$∴cos∠EMB=\frac{BM}{EM}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，即平面$ADE$与平面$ABC$所成的锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$．

1. 已知函数$f(x)=xlnx$．

$($Ⅰ$)$求函数$f(x)$在$[1,3]$上的最小值；

$($Ⅱ$)$若存在$x\in [\frac{1}{e},e]$使不等式$2f(x)\geq −x^{2}+ax−3$成立，求实数$a$的取值范围．

【答案】解：$($Ⅰ$)$由$f(x)=xlnx$，可得$f′\left(x\right)=lnx+1$，

当$x\in (0,\frac{1}{e})$时，$f′(x)<0,f(x)$单调递减；当$x\in (\frac{1}{e},+\infty )$时，$f′(x)>0,f(x)$单调递增．

所以函数$f(x)$在$[1,3]$上单调递增．又$f(1)=ln1=0$，所以函数$f(x)$在$[1,3]$上的最小值为$0$．

$($Ⅱ$)$由题意知，$2xlnx\geq −x^{2}+ax−3,$则$a\leq 2lnx+x+\frac{3}{x}$．

若存在$x\in [\frac{1}{e},e]$使不等式$2f(x)\geq −x^{2}+ax−3$成立，只需$a$小于或等于$2lnx+x+\frac{3}{x}$的最大值．

设$ℎ\left(x\right)=2lnx+x+\frac{3}{x}\left(x>0\right)$，则$ℎ′\left(x\right)=\frac{2}{x}+1−\frac{3}{x^{2}}=\frac{\left(x+3\right)\left(x−1\right)}{x^{2}}$．

当$x\in [\frac{1}{e},1)$时，$ℎ′\left(x\right)<0,ℎ\left(x\right)$单调递减；当$x\in (1,e]$时，$ℎ′\left(x\right)>0,ℎ\left(x\right)$单调递增．

由$ℎ(\frac{1}{e})=−2+\frac{1}{e}+3e$，$ℎ(e)=2+e+\frac{3}{e}$，$ℎ(\frac{1}{e})−ℎ(e)=2e−\frac{2}{e}−4>0$，

可得$ℎ(\frac{1}{e})>ℎ(e)$．所以，当$x\in [\frac{1}{e},e]$时，$ℎ(x)$的最大值为$ℎ(\frac{1}{e})=−2+\frac{1}{e}+3e$．

故$a\leq −2+\frac{1}{e}+3e$．

1. 某城市$100$户居民的月平均用电量$($单位：千瓦时$)$以$[160,180)$，$[180,200)$，$[200,220)$，$[220,240)$，$[240,260)$，$[260,280)$，$[280,300]$分组的频率分布直方图如图所示．
$(1)$求直方图中$x$的值$;$
$(2)$求月平均用电量的中位数和平均数$($同一组中的数据用该组区间的中点值作代表$);$
$(3)$在月平均用电量为$[240,260)$，$[260,280)$，$[280,300]$的三组用户中，用分层抽样的方法抽取$6$户居民，并从抽取的$6$户中任选$2$户参加一个访谈节目，求参加节目的$2$户来自不同组的概率．



【答案】解：$(1)$由$(0.0020+0.0095+0.0110+0.0125+x+0.0050+0.002 5)×20=1$，得$x=0.0075$，所以直方图中$x$的值是$0.0075$．
$(2)$因为$(0.0020+0.0095+0.0110)×20=0.45<0.5$，
且$(0.0020+0.0095+0.0110+0.0125)×20=0.7>0.5$，
所以月平均用电量的中位数在$[220,240)$内，设中位数为$a$，由$(0.0020+0.0095+0.0110)×20+0.0125×(a−220)=0.5$，
解得$a=224$，所以月平均用电量的中位数是$224$．
$\overline{x}=170×0.04+190×0.19+210×0.22+230×0.25+250×0.15+270×0.1+290×0.05=225.6$．
$(3)$月平均用电量在$[240,260)$的用户有$0.0075×20×100=15$户，
月平均用电量在$[260,280)$的用户有$0.005×20×100=10$户，
月平均用电量在$[280,300]$的用户有$0.002 5×20×100=5$户．
抽样方法为分层抽样，在$[240,260)$，$[260,280)$，$[280,300]$中的用户比为$3: 2: 1$，
所以在$[240,260)$，$[260,280)$，$[280,300]$中分别抽取$3$户、$2$户和$1$户．
设参加节目的$2$户来自不同组为事件$A$，将来自$[240,260)$的用户记为$a\_{1}$，$a\_{2}$，$a\_{3}$，来自$[260,280)$的用户记为$b\_{1}$，$b\_{2}$，来自$[280,300]$的用户记为$c\_{1}$，在$6$户中随机抽取$2$户，$Ω=\{(a\_{1},a\_{2})$，$(a\_{1},a\_{3})(a\_{1},b\_{1})$，$(a\_{1},b\_{2})$，$(a\_{1},c\_{1})$，$(a\_{2},a\_{3})$，$(a\_{2},b\_{1})$，$(a\_{2},b\_{2})$，$(a\_{2},c\_{1})$，$(a\_{3},b\_{1})$，$(a\_{3},b\_{2})$，$(a\_{3},c\_{1})$，$(b\_{1},b\_{2})$，$(b\_{1},c\_{1})$，$(b\_{2},c\_{1})$，共包含$15$个样本点，其中$A=\{(a\_{1},b\_{1})$，$(a\_{1},b\_{2})$，$(a\_{1},c\_{1})$，$(a\_{2},b\_{1})$，$(a\_{2},b\_{2})$，$(a\_{2},c\_{1})$，$(a\_{3},b\_{1})$，$(a\_{3},b\_{2})$，$(a\_{3},c\_{1})$，$(b\_{1},c\_{1})$，$(b\_{2},c\_{1})$，$A$包含的样本点个数为$11$，
故参加节目的$2$户来自不同组的概率$P(A)=\frac{11}{15}$．

1. 在平面直角坐标系$xOy$中，已知点$A(−\sqrt{6},0)$，$B(\sqrt{6},0)$，动点$E(x,y)$满足直线$AE$与$BE$的斜率之积为$−\frac{1}{3}$，记$E$的轨迹为曲线$C$．

$(1)$求$C$的方程，并说明$C$是什么曲线；

$(2)$过点$D(2,0)$的直线$l$交$C$于$P$，$Q$两点，过点$P$作直线$x=3$的垂线，垂足为$G$，过点$O$作$OM⊥QG$，垂足为$M$．证明：存在定点$N$，使得$|MN|$为定值．

【答案】$(1)$解：由题得$\frac{y}{x+\sqrt{6}}⋅\frac{y}{x−\sqrt{6}}=−\frac{1}{3}$，化简得$\frac{x^{2}}{6}+\frac{y^{2}}{2}=1(|x|\ne \sqrt{6})$，
所以$C$是中心在原点，焦点在$x$轴上，不含左、右顶点的椭圆．
$(2)$证明：由$(1)$知直线$l$与$x$轴不重合，可设$l:x=my+2$，
联立$\left\{\begin{matrix}x=my+2,\\\frac{x^{2}}{6}+\frac{y^{2}}{2}=1,\end{matrix}\right.$得$(m^{2}+3)y^{2}+4my−2=0$．
设$P(x\_{1},y\_{1})$，$Q(x\_{2},y\_{2})$，则$y\_{1}+y\_{2}=−\frac{4m}{m^{2}+3}$，$y\_{1}y\_{2}=−\frac{2}{m^{2}+3}$，$Δ=24m^{2}+24>0$，
所以$m=\frac{1}{2}(\frac{1}{y\_{1}}+\frac{1}{y\_{2}}).$因为$G(3,y\_{1})$，$Q(my\_{2}+2,y\_{2})$，
所以直线$QG$的斜率为$\frac{y\_{2}−y\_{1}}{my\_{2}−1}=\frac{y\_{2}−y\_{1}}{\frac{1}{2}(\frac{1}{y\_{1}}+\frac{1}{y\_{2}})y\_{2}−1}=2y\_{1}$，
所以直线$QG$的方程为$y−y\_{1}=2y\_{1}(x−3)$，所以直线$QG$过定点$H(\frac{5}{2},0)$．
因为$OM⊥QG$，所以$△OHM$为直角三角形，
取$OH$的中点$N(\frac{5}{4},0)$，则$|MN|=\frac{1}{2}|OH|=\frac{5}{4}$，即$|MN|$为定值．
综上，存在定点$N(\frac{5}{4},0)$，使得$|MN|$为定值．