昆八中 2021-2022 学年度下学期月考一

特色高二数学试卷答案

考试时间：150 分钟 满分：150 分

命题教师：刘清华 审题教师：杨朝锋

一、单选题（本大题共**8**小题，共**40.0**分）

1. 抛物线$y=2x^{2}$的焦点坐标是$(    )$

A. $(\frac{1}{2},0)$ B. $(−\frac{1}{2},0)$ C. $(0,\frac{1}{8})$ D. $(0,−\frac{1}{8})$

【答案】*C*

【解答】抛物线$y=2x^{2}$，化为$x^{2}=\frac{1}{2}y$，它的焦点坐标为：$(0,\frac{1}{8}).$故选：$C$．

1. 已知等差数列$\{a\_{n}\}$的公差为$2$，若$a\_{1}$，$a\_{3}$，$a\_{4}$成等比数列，则$a\_{2}$等于$($   $)$

A. $–4$ B. $–6$ C. $–8$ D. $–10$

【答案】*B*

【解答】由题意得，在等差数列$\{a\_{n}\}$中，$a\_{3}=a\_{1}+4,a\_{4}=a\_{1}+6$，

$∵a\_{1},a\_{3},a\_{4}$成等比数列，$∴a\_{3}^{2}=a\_{1}a\_{4}$，即$(a\_{1}+4)^{2}=a\_{1}(a\_{1}+6)$，

解得$a\_{1}=−8$．$∴a\_{2}=a\_{1}+d=−8+2=−6$，故选*B*．

1. 联合国$《$生物多样性公约$》$第十五次缔约方大会$(COP15)$于$2021$年$10$月$11$日至$15$日和$2022$年上半年分两阶段在中国昆明举行$.$为了让广大市民深入了解$COP15$，展现春城昆明的城市形象，$2021$年$6$月$5$日全国$30$个城市联动举行了“$2021COP15$春城之邀$——$一粒来自昆明的种子”活动，活动特别准备了$2$万份“神秘”花种盲盒，其中有一种花种的花卉，其植株高度的一个随机样本的频率分布直方图如图所示，根据这个样本的频率分布直方图，下面结论中不正确的是$(    )$

A. 这种花卉的植株高度超过$50cm$的估计占$25\%$
B. 这种花卉的植株高度低于$30cm$的估计占$5\%$
C. 这种花卉的植株高度的平均数估计超过$45cm$
D. 这种花卉的植株高度的中位数估计不超过$45cm$

【答案】*D*

【解答】植株高度超过$50cm$的估计为$0.15+0.1=0.25$，故*A*正确；植株高度低于$30cm$的估计为$0.05$，故*B*正确；
植株高度的平均数估计值为$10×\left(25×0.005+35×0.01+45×0.06+55×0.015+65×0.01\right)=46.5$，故*C*正确；设中位数为$x$，则$0.05+0.1+\left(x−40\right)×0.06=0.5$，解得$x≈45.8$，故*D*错误．故选*D*．

1. 下列函数中，在$(0,+\infty )$内为增函数的是$($   $)$

A. $y=sinx$ B. $y=xe^{x            }$ C. $y=x^{3}−x$ D. $y=lnx−x$

【答案】*B*

【解答】对于$A$，$y=sinx$在$(0,+\infty )$上没有单调性，故*A*错误；
对于$B$，$y′=(xe^{x})′=e^{x}+xe^{x}=e^{x}(x+1)>0$在$(0,+\infty )$上恒成立，
$∴y=xe^{x}$在$(0,+\infty )$上为增函数，故*B*正确；
对于$C$，$y′=3x^{2}−1$，令$y′=3x^{2}−1=0$，解得$x=\frac{\sqrt{3}}{3}($负值舍去$)$，
当$x\in (0,\frac{\sqrt{3}}{3})$，$y′<0$，函数单调递减，当$x\in (\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty )$，$y′>0$，函数单调递增，
故在$(0,+\infty )$内不单调递增，故*C*错误；
对于$D$，$y′=\frac{1}{x}−1$，令$y′=\frac{1}{x}−1=0$，解得$x=1$，
当$x\in (0,1)$，$y′>0$，函数单调递增，当$x\in (1,+\infty )$，$y′<0$，函数单调递减，
故在$(0,+\infty )$内不单调递增，故*D*错误；故选*B*．

1. 在某校举行的秋季运动会中，有甲，乙，丙，丁四位同学参加了$50$米短跑比赛．现将四位同学安排在$1$，$2$，$3$，$4$这$4$个跑道上，每个跑道安排一名同学，则甲不在$1$道，乙不在$2$道的不同安排方法有$($    $)$种．A. $12$ B. $14$ C. $16$ D. $18$

【答案】*B*

【解答】$①$甲在$2$道的安排方法有：种；
$②$甲不在$2$道，则甲只能在$3$或$4$号道，乙不能在$2$道，只能在剩下的$2$个道中选择一个，丙丁有$2$种，所以甲不在$2$号跑道的分配方案有种，共有$6+8=14$种方案，故选*B*．

1. 函数$f(x)$的导函数$f′(x)$，满足关系式$f(x)=x^{2}+3xf′(2)−lnx$，则$f′(2)$的值为$(    )$

A. $\frac{7}{4}$ B. $−\frac{7}{4}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $−\frac{9}{4}$

【答案】*B*

【解答】$∵f(x)=x^{2}+3xf′(2)−lnx$，$∴f^{′}(x)=2x+3f^{′}(2)−\frac{1}{x}$，
令$x=2$，则$f^{′}(2)=4+3f^{′}(2)−\frac{1}{2}$，即$2f^{′}(2)=−\frac{7}{2}$，$∴f^{′}(2)=−\frac{7}{4}$．故选*B*．

1. 若函数$f(x)=x^{2}−ax+ln x$在区间$(1,e)$上单调递增，则$a$的取值范围是  $($    $)$

A. $[3,+\infty )$ B. $(−\infty ,3]$ C. $[3,e^{2}+1]$ D. $[e^{2}+1,3]$

【答案】*B*

【解答】$∵f(x)=x^{2}−ax+lnx$，$∴$ $f′(x)=2x−a+\frac{1}{x}$，$∵f(x)$在$(1,e)$上单调递增，
$∴f′(x)\geq 0$在$(1,e)$上恒成立，$∴a\leq 2x+\frac{1}{x}$在$(1,e)$上恒成立，
令$ℎ(x)=2x+\frac{1}{x}$，则$ℎ′(x)=2−\frac{1}{x^{2}}=\frac{2x^{2}−1}{x^{2}}$，$∵1<x<e$，$∴ℎ′(x)>0$，
$∴ℎ(x)$在$(1,e)$上单调递增，$∴ℎ(x)>ℎ(1)=3$，$∴a\leq 3$．故选*B*．

1. 设函数$f′(x)$是函数$f(x)(x\in R)$的导函数，若对任意的$x\in R$，恒有$xf′(x)+2f(x)<0$，则函数$g(x)=f(x)−\frac{2}{x^{2}}$的零点个数为$($     $)$A. $0$ B. $1$ C. $2$ D. $3$

【答案】*A*

【解答】构造函数$F(x)=x^{2}f(x)−2$，可得$F′(x)=x^{2}f′(x)+2xf(x)=x[xf^{′}(x)+2f(x)]$，
因为对于任意的$x\in R$，恒有$xf^{′}(x)+2f(x)<0$，
所以当$x<0$时，$F′(x)>0$，即$F(x)$单调递增，当$x>0$时，$F′(x)<0$，$F(x)$单调递减，
$∴$当$x=0$时，$F(x)$取得最大值$−2$，所以函数$F(x)$没有零点，
$∴g(x)=f(x)−\frac{2}{x^{2}}=\frac{x^{2}f(x)−2}{x^{2}}=\frac{F\left(x\right)}{x^{2}}$也没有零点，故函数的零点个数为$0$．故选*A*．

二、多选题（本大题共**4**小题，共**20.0**分）

1. 已知曲线$f\left(x\right)=\frac{2}{3}x^{3}−x^{2}+ax−1$上存在两条斜率为$3$的不同切线，且切点的横坐标都大于零，则实数$a$可能的取值$($    $)$A. $\frac{19}{6}$ B. $3$ C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{9}{2}$

【答案】*AC*

【解答】$f(x)=\frac{2}{3}x^{3}−x^{2}+ax−1$的导数为$f′(x)=2x^{2}−2x+a$，
由题意可得$2x^{2}−2x+a=3$，即$2x^{2}−2x+a−3=0$有两个不等的正根，
则$△=4−8(a−3)>0$，$x\_{1}+x\_{2}=1>0$，$x\_{1}x\_{2}=\frac{1}{2}(a−3)>0$，
解得$3<a<\frac{7}{2}$，故实数$a$可能的取值为$\frac{19}{6}$，$\frac{10}{3}$．故选*AC*．

1. 关于双曲线$C：\frac{x^{2}}{4}−\frac{y^{2}}{5}=1$，下列说法正确的是$(    )$

A. 该双曲线与双曲线$\frac{y^{2}}{5}−\frac{x^{2}}{4}=1$有相同的渐近线
B. 过点$F(3,0)$作直线$l$与双曲线$C$交于$A$、$B$，若$|AB|=5$，则满足条件的直线只有一条
C. 若直线$l$与双曲线$C$的两支各有一个交点，则直线$l$的斜率$k\in (−\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$
D. 过点$P(1,2)$能作$4$条直线与双曲线$C$仅有一个交点

【答案】*ACD*

【解答】选项*A*，双曲线$C：\frac{x^{2}}{4}−\frac{y^{2}}{5}=1$与双曲线$\frac{y^{2}}{5}−\frac{x^{2}}{4}=1$的渐近线均为$y=\pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$，即选项*A*正确；

选项*B*，当直线$l$与双曲线的右支交于$A$，$B$时，通径最短，为$\frac{2b^{2}}{a}=\frac{2×5}{2}=5$；
当直线$l$与双曲线的左右两支分别交于$A$，$B$时，$|AB|$的最小值为$2a=4$，所以若$|AB|=5$，
则满足条件的直线有$3$条，选项*B*错误；
选项*C*，双曲线$C$的渐近线为$y=\pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$，若直线$l$与双曲线$C$的两支各有一个交点，
则直线$l$的斜率$k\in (−\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$，选项*C*正确；
选项*D*，过点$P(1,2)$可作两条与渐近线平行的直线和两条切线，均与双曲线只有$1$个交点，
故满足条件的直线有$4$条，选项*D*正确．故选：$ACD$．

1. 已知数列$\left\{a\_{n}\right\}$是等比数列，公比为$q$，前$n$项和为$S\_{n}$，下列判断正确的有$($    $)$

A. $\left\{\frac{1}{a\_{n}}\right\}$为等比数列 B. $\left\{log\_{2}a\_{n}\right\}$为等差数列
C. $\left\{a\_{n}+a\_{n+1}\right\}$为等比数列 D. 若$S\_{n}=3^{n−1}+r$，则$r=−\frac{1}{3}$

【答案】*AD*

【解答】令$b\_{n}=\frac{1}{a\_{n}}$，则$\frac{b\_{n+1}}{b\_{n}}=\frac{a\_{n}}{a\_{n+1}}=\frac{1}{q}(n\in N\_{+})$，所以$\{\frac{1}{a\_{n}}\}$是等比数列，选项*A*正确；
若$a\_{n}<0$，则$log\_{2}a\_{n}$无意义，所以选项*B*错误；
当$q=−1$时，$a\_{n}+a\_{n+1}=0$，此时$\{a\_{n}+a\_{n+1}\}$不是等比数列，所以选项*C*错误；
若$S\_{n}=3^{n−1}+r$，则$a\_{1}=S\_{1}=1+r$；$a\_{2}=S\_{2}−S\_{1}=3+r−(1+r)=2$；$a\_{3}=S\_{3}−S\_{2}=9+r−(3+r)=6$，
由$\{a\_{n}\}$是等比数列，得$a\_{2}^{2}=a\_{1}a\_{3}$，即$4=6(1+r)$，解得$r=−\frac{1}{3}$，所以选项*D*正确．故选：$AD$．

1. 已知函数$f(x)$及其导数$f^{′}(x)$，若存在$x\_{0}$，使得$f\left(x\_{0}\right)=f′\left(x\_{0}\right)$，则称$x\_{0}$是$f(x)$的一个“巧值点”$.$下列函数中，有“巧值点”的是$($    $)$

A. $f(x)=x^{2}$ B. $f(x)=e^{−x}$ C. $f(x)=lnx$ D. $f(x)=\frac{1}{x}$

【答案】*ACD*

【解答】若$f(x)=x^{2 }$，则$f′\left(x\right)=2x$，由$x^{2}=2x$得$x=0$或$x=2$，显然方程有解，故*A*正确；
若$f(x)=e^{−x}$，则$f′\left(x\right)=−e^{−x}$，即$e^{−x}=−e^{−x}$，方程无解，故*B*错误；
若$f(x)=lnx(x>0)  ,$则$f′\left(x\right)=\frac{1}{x}$，即$lnx=\frac{1}{x}$，利用数形结合可知该方程有实数根，故*C*正确；
若$f(x)=\frac{1}{x}(x\ne 0)$，则$f′\left(x\right)=−\frac{1}{x^{2}}$，即$\frac{1}{x}=−\frac{1}{x^{2}}$，解得$x=−1$，所以函数$f(x)=\frac{1}{x}$有“巧值点”，故*D*正确．故选*ACD*．

三、填空题（本大题共**4**小题，共**20.0**分）

1. 甲、乙两人独立地破译一份密码，已知各人能破译的概率分别为$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$则密码被成功破译的概率          ．

【答案】$\frac{1}{2}$

解：根据题意，设甲破译密码为事件$A$，乙破译密码为事件$B$，则$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，

$P(\overset{−}{A}\overset{−}{B})=\frac{2}{3}×\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$，则密码被破译的概率$P=1−P(\overset{−}{A}\overset{−}{B})=1−\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故答案为：$\frac{1}{2}$．

1. 已知数列$\left\{a\_{n}\right\}$满足$a\_{1}=1$，且$3a\_{n+1}a\_{n}+a\_{n+1}−a\_{n}=0$恒成立，则$a\_{6}$的值为          $.$

【答案】$\frac{1}{16}$

【解答】$∵$数列$\{a\_{n}\}$满足$a\_{1}=1$，$3a\_{n+1}a\_{n}+a\_{n+1}−a\_{n}=0$恒成立，
$∴3a\_{n+1}a\_{n}=a\_{n}−a\_{n+1}$ $∴\frac{1}{a\_{n+1}}−\frac{1}{a\_{n}}=3$，$∴$数列$\left\{\frac{1}{a\_{n}}\right\}$是以$\frac{1}{a\_{1}}=1$为首项，公差为$3$的等差数列，
$∴\frac{1}{a\_{n}}=1+3\left(n−1\right)=3n−2$，$∴a\_{n}=\frac{1}{3n−2}$，$∴a\_{6}=\frac{1}{3×6−2}=\frac{1}{16}$．故答案为$\frac{1}{16}$．

1. 已知函数$f(x)=x^{3}+mx$，若$f(e^{x})\geq f(x−1)$对$x\in R$恒成立，则实数$m$的取值范围为          ．

【答案】$[0,+\infty )$

【解答】令$g(x)=e^{x}−(x−1)$，则$g′(x)=e^{x}−1$，当$x<0$时，$g′(x)<0$，当$x\geq 0$时，$g′(x)\geq 0$，
$∴g′(x)$在$(−\infty ,0)$上单调递减，在$(0,+\infty )$上单调递增，
$∴$当$x=0$时，$g(x)$取得最小值$g(0)=0$，$∴e^{x}−(x−1)\geq 0$，即$e^{x}\geq x−1$，
$∵f(e^{x})\geq f(x−1)$对$x\in R$恒成立，$∴f(x)=x^{3}+mx$为$R$上的增函数，
$∴f′(x)=3x^{2}+m\geq 0$恒成立，$∴m\geq 0$，即实数$m$的取值范围为$[0,+\infty )$，故答案为：$[0,+\infty )$

|  |
| --- |
|  |

1. 如图，已知抛物线$C$：$y^{2}=4x$的焦点为$F$，抛物线$C$的准线$l$与$x$轴相交于点$A$，点$Q(Q$在第一象限$)$在抛物线$C$上，射线$FQ$与准线$l$相交于点$B$，$\vec{BQ}=2\vec{QF}$，直线$AQ$与抛物线$C$交于另一点$P$，则$\frac{|PQ|}{|AQ|}+\frac{|BP|}{|PF|}=$          ．

【答案】$3$

【解答】设$Q(x\_{1},y\_{1})$，$P(x\_{2},y\_{2})$，则$y\_{1}^{2}=4x\_{1}$，$y\_{2}^{2}=4x\_{2}$，$y\_{1}>0$，$y\_{2}>0$，
$y^{2}=4x$的焦点$F(1,0)$，$A(−1,0)$，由$\vec{BQ}=2\vec{QF}$，可得$x\_{1}−(−1)=2(1−x\_{1})$，解得$x\_{1}=\frac{1}{3}$，
可得$Q(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$，由$\frac{2\sqrt{3}}{3}−y\_{B}=2(0−\frac{2\sqrt{3}}{3})$，解得$y\_{B}=2\sqrt{3}$，直线$AQ$的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$，
与抛物线方程$y^{2}=4x$联立，可得$\frac{3}{4}x^{2}−\frac{5}{2}x+\frac{3}{4}=0$，则$\frac{1}{3}x\_{2}=1$，可得$x\_{2}=3$，
则$P(3,2\sqrt{3})$，所以$PB⊥AB$，由抛物线的定义，可得$|PF|=|PB|$，
且$PB//AF$，可得$\frac{|PQ|}{|AQ|}=\frac{|BQ|}{|QF|}=2$，所以$\frac{|PQ|}{|AQ|}+\frac{|PB|}{|PF|}=2+1=3$．故答案为：$3$．

四、解答题（本大题共**6**小题，共**70**分）

1. $△ABC$内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，已知$a=bcosC+csinB$．

$($Ⅰ$)$求$B;($Ⅱ$)$若$b=2$，求$△ABC$面积的最大值．

【答案】解：$($Ⅰ$)$由已知及正弦定理得：$sinA=sinBcosC+sinBsinC①$，
$∵sinA=sin(B+C)=sinBcosC+cosBsinC②$，$∵sinC\ne 0$，
$∴sinB=cosB$，即$tanB=1$，$∵B$为三角形的内角，$∴B=\frac{π}{4}$；
$($Ⅱ$)S\_{△ABC}=\frac{1}{2}acsinB=\frac{\sqrt{2}}{4}ac$，
由已知及余弦定理得：$4=a^{2}+c^{2}−2accos\frac{π}{4}\geq 2ac−2ac×\frac{\sqrt{2}}{2}$，
整理得：$ac\leq \frac{4}{2−\sqrt{2}}$，当且仅当$a=c$时，等号成立，
则$△ABC$面积的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{4}×\frac{4}{2−\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$．

1. 已知函数$f\left(x\right)=ax^{3}−x+b\left(a\ne 0\right)$，若函数$f\left(x\right)$在点$(1,f(1))$处的切线方程是$2x−y+3=0$．

$($Ⅰ$)$求函数$f\left(x\right)$的解析式；$($Ⅱ$)$求$f\left(x\right)$的单调区间．

【答案】解：$($Ⅰ$)$由$f(x)=ax^{3}−x+b(a\ne 0)$，得$f′\left(x\right)=3ax^{2}−1$，
$∵$函数$f\left(x\right)$在点$(1,f(1))$处的切线方程是$2x−y+3=0$，
$∴f′\left(x\right)=3a−1=2$，$∴a=1$，把$x=1$代入$2x−y+3=0$，得切点为$(1,5)$，
$∴f(1)=1−1+b=5$，得$b=5$，$∴f(x)=x^{3}−x+5$，
$($Ⅱ$)$由$($Ⅰ$)$知，$f′\left(x\right)=3x^{2}−1$ 令$f′\left(x\right)=3x^{2}−1>0$，解得：$x\in (−\infty ,−\frac{\sqrt{3}}{3})∪(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty )$，
令$f^{′}(x)<0$，解得：$x\in (−\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，故$f(x)$的单调增区间为：$(−\infty ,−\frac{\sqrt{3}}{3})$，$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty )$；
$f(x)$的单调减区间为$(−\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}) .$

1. 已知等差数列$\{a\_{n}\}$中，公差$d>0$，$S\_{11}=77$，且$a\_{2}$，$a\_{6}−1$，$a\_{11}$成等比数列．

$(1)$求数列$\{a\_{n}\}$的通项公式$;$

$(2)$若$T\_{n}$为数列$\left\{\frac{1}{a\_{n}a\_{n+1}}\right\}$的前$n$项和，且存在$n\in N^{∗}$，使得$T\_{n}−λa\_{n+1}\geq 0$成立，求实数$λ$的取值范围．

【答案】解：$(1)$由题意可得$\left\{\begin{matrix}11a\_{1}+\frac{11×10}{2}d=77\\\left(a\_{1}+5d−1\right)^{2}=\left(a\_{1}+d\right)\left(a\_{1}+10d\right)\end{matrix}\right.$即$\left\{\begin{matrix}a\_{1}+5d=7,\\(7−4d)⋅(7+5d)=36\end{matrix}\right.,$
又因为$d>0$，所以$\left\{\begin{matrix}a\_{1}=2,\\d=1.\end{matrix}\right.$所以$a\_{n}=n+1$；
$(2)∵\frac{1}{a\_{n}a\_{n+1}}=\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=\frac{1}{n+1}−\frac{1}{n+2}$，
$∴T\_{n}=\frac{1}{2}−\frac{1}{3}+\frac{1}{3}−\frac{1}{4}+\cdots +\frac{1}{n+1}−\frac{1}{n+2}=$ $\frac{1}{2}−\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2\left(n+2\right)}$，
$∵$存在$n\in N^{∗}$，使得$T\_{n}−λa\_{n+1}⩾0$成立，即存在$n\in N^{∗}$，使得$\frac{n}{2\left(n+2\right)}−λ\left(n+2\right)\geq 0$成立，
即存在$n\in N^{∗}$，使得$λ\leq \frac{n}{2\left(n+2\right)^{2}}$成立，$∵\frac{n}{2(n+2)^{2}}=\frac{1}{2(n+\frac{4}{n}+4)}⩽\frac{1}{2(2\sqrt{n·\frac{4}{n}}+4)}=\frac{1}{16}($当且仅当$n=2$时取等号$)$，
$∴λ\leq \frac{1}{16}$，即实数$λ$的取值范围是$\left(−\infty ,\frac{1}{16}\right]$．

1. 如图，在四棱锥$P−ABCD$中，平面$PAB⊥$平面$ABCD$，$BC//AD$，$∠BAD=90°$，$PA=AD=2AB=4BC=4$，$PC=\sqrt{21}$．
$(1)$证明：$PA⊥$平面$ABCD$；
$(2)$线段$AB$上是否存在一点$M$，使得$MC$与平面$PCD$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{221}}{17}$？若存在，请求出$\frac{AM}{AB}$的值；若不存在，请说明理由．

【答案】$(1)$证明：$∵$平面$PAB⊥$平面$ABCD$，平面$PAB∩$平面$ABCD=AB$，$∠BAD=90°$，$∴AD⊥$平面$PAB$，
$∵PA⊂$平面$PAB$，$∴AD⊥PA$，
在直角梯形$ABCD$中，$2AB=4BC=4$，$∴AC=\sqrt{AB^{2}+BC^{2}}=\sqrt{2^{2}+1^{2}}=\sqrt{5}$，
$∵PA=4$，$PC=\sqrt{21}$，$∴PA^{2}+AC^{2}=PC^{2}$，即$PA⊥AC$，
又$AD∩AC=A$，$AD$、$AC⊂$平面$ABCD$，$∴PA⊥$平面$ABCD$．
$(2)$解：以$A$为原点，$AB$，$AD$，$AP$所在直线分别为$x$，$y$，$z$轴建立如图所示的空间直角坐标系，
则$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$P(0,0,4)$，$C(2,1,0)$，$D(0,4,0)$，
$∴\vec{AB}=(2,0,0)$，$\vec{PC}=(2,1,−4)$，$\vec{PD}=(0,4,−4)$，
设$\vec{AM}=λ\vec{AB}$，$λ\in [0,1]$，则$M(2λ,0,0)$，
$∴\vec{MC}=(2−2λ,1,0)$，
设平面$PCD$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，
则$\left\{\begin{matrix}\vec{n}⋅\vec{PC}=0\\\vec{n}⋅\vec{PD}=0\end{matrix}\right.$，即$\left\{\begin{matrix}2x+y−4z=0\\4y−4z=0\end{matrix}\right.$，
令$y=1$，则$x=\frac{3}{2}$，$z=1$，$∴\vec{n}=(\frac{3}{2},1,1)$，
$∵MC$与平面$PCD$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{221}}{17}$，$∴\frac{\sqrt{221}}{17}=|cos<\vec{n}$，$\vec{MC}>|=|\frac{\vec{n}⋅\vec{MC}}{|\vec{n}|⋅|\vec{MC}|}|$
$=|\frac{\frac{3}{2}(2−2λ)+1}{\sqrt{\frac{9}{4}+1+1}×\sqrt{(2−2λ)^{2}+1}}|$，化简得$16λ^{2}−8λ+1=0$，解得$λ=\frac{1}{4}$，
故线段$AB$上存在点$M$满足题意，且$\frac{AM}{AB}=\frac{1}{4}$．

1. 已知函数$f(x)=alnx−x(a\in R)$．
$($Ⅰ$)$求函数$f(x)$的单调区间；
$($Ⅱ$)$当$a>0$时，设$g(x)=x−lnx−1$，若对于任意$x\_{1}$，$x\_{2}\in (0,+\infty )$，均有$f(x\_{1})<g(x\_{2})$，求$a$的取值范围．

【答案】解：$($Ⅰ$)$函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty )$，$f^{′}(x)=\frac{a}{x}−1=\frac{−x+a}{x}$，$(x>0)$，
$①$当$a\leq 0$时，$f^{′}(x)<0$，函数$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty )$，
$②$当$a>0$时，令$f^{′}(x)=0$，得$x=a$，
当$x\in (0,a)$时，$f^{′}(x)>0$，当$x\in (a,+\infty )$时，$f^{′}(x)<0$，
$∴$函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,a)$，单调递减区间为$(a,+\infty );$
$($Ⅱ$)$由题意，原问题可转化为$f(x)\_{max}<g(x)\_{min}$，
由$($Ⅰ$)$知，当$a>0$时，函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,a)$，单调递减区间为$(a,+\infty )$．
故$f(x)$的极大值即为最大值，$f(x)\_{max}=f(a)=alna−a$，$g^{′}(x)=1−\frac{1}{x}=\frac{x−1}{x}$，
当$x\in (0,1)$时，$g^{′}(x)<0$，当$x\in (1,+\infty )$时，$g^{′}(x)>0$，
$∴$函数$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty )$上单调递增，
故$g(x)$的极小值即为最小值，$∴g(x)\_{min}=g(1)=0$，
$∴alna−a<0(a>0)$，解得：$0<a<e$．$∴a$的取值范围为$(0,e)$．

1. 已知椭圆$C:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$经过点$(\sqrt{3},1)$，且离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$．

$(1)$求椭圆$C$的方程$;$

$(2)$设椭圆$C$的左、右焦点分别为$F\_{1}$，$F\_{2}$，抛物线$C′$的顶点为坐标原点、焦点为$F\_{2}$，过点$F\_{2}$的直线$l$与$C′$交于$A$，$B$两点，点$B$关于$x$轴的对称点为$B′$，证明：$A$，$F\_{1}$，$B′$三点共线．

【答案】$(1)$解：$∵$椭圆$C$：$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$过点$(\sqrt{3},1)$，且离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$．
$∴\left\{\begin{matrix}\frac{3}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}}=1\\\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}\\a^{2}=b^{2}+c^{2}\end{matrix}\right.$，解得$a^{2}=6$，$b^{2}=2$，$c=2$，$∴$椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^{2}}{6}+\frac{y^{2}}{2}=1$．
$(2)$证明：$c=2$，$F\_{1}(−2,0)$，$F\_{2}(2,0)$，所以抛物线方程为$y^{2}=8x$，
显然，$l$的斜率不为$0$，设直线$l$的方程为$x=my+2$，
设$A(\frac{y\_{1}^{2}}{8},y\_{1}),B(\frac{y\_{2}^{2}}{8},y\_{2}),$则$B^{′}(\frac{y\_{2}^{2}}{8},−y\_{2}),$
联立$l$与$C^{′}$的方程得到$y^{2}−8my−16=0$，则$y\_{1}y\_{2}=−16$，
$$\vec{F\_{1}A}=\left(\frac{y\_{1}^{2}}{8}+2,y\_{1}\right),\vec{F\_{1}B^{′}}=\left(\frac{y\_{2}^{2}}{8}+2,−y\_{2}\right),$$

$∵−y\_{2}\left(\frac{y\_{1}^{2}}{8}+2\right)−y\_{1}\left(\frac{y\_{2}^{2}}{8}+2\right)=−\left(y\_{1}+y\_{2}\right)\left(2+\frac{y\_{1}y\_{2}}{8}\right)=0$，
$∴\vec{F\_{1}A}//\vec{F\_{1}B^{′}}$，即$F\_{1}$，$A$，$B^{′}$三点共线．