

一、单项选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	A	B	D	C	D	B

1.  $\because P=\{1, 3, 5\}$  ;  $Q=\{4\}$

$\therefore P \cup Q = \{1, 3, 4, 5\}$

故选择 D 选项

2.  $\because (1+i)z = |1+\sqrt{3}i|$

$\therefore (1+i)z = 2$

$\therefore z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$

故 z 为 1-i

3. 由题意有:  $\vec{m} // \vec{n}$  时,

$$\lambda - 3(\lambda - 2) = 0$$

解出  $\lambda = 3$

故选 A

4. 由题意有: 直线  $x-2y+2=0$  与直线  $3x+y-1=0$  的交点为  $(0, 1)$

$\therefore$  所求直线与  $5x+3y+7=0$  平行

$\therefore$  设所求直线为:  $5x+3y+c=0$ , 把点  $(0, 1)$  代入可得  $c=-3$

$\therefore$  所求直线为:  $5x+3y-3=0$

5. 根据题意:  $f(x)$  为 R 上奇函数, 所以  $\frac{f(x)}{x}$  为偶函数

$\therefore f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数,  $f(-3)=0$

$\therefore$  当  $x > 3$  时,  $\frac{f(x)}{x} > 0$

所以  $x > 0$  的时  $\frac{f(x)}{x} < 0$  的解集为  $x \in (0, 3)$

根据奇偶性  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增,

$\therefore x < 0$  时,  $\frac{f(x)}{x} < 0$  的解集为  $x \in (-3, 0)$

综上所述:  $x \in (-3, 0) \cup (0, 3)$

6. 两个同色球有两种情况: ①两个白球; ②两个红球

① 设取得两个白球为事件 A, 则  $P(A) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$

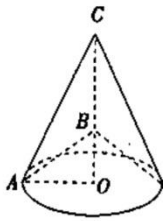
② 设取得两个红球为事件 B, 则  $P(B) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

由于“取得两个红球”与取得两个白球”是互斥事件, 因此事件 C “取得两个同色球”, 只

需要两互斥事件有一个发生即可, 因此取得两个同色球的概率为  $P(C) = \frac{6}{15} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$

或使用列举法：假设白球为 A、B、C、D，假设红球为 1、2  
 一共有其中这几种搭配：AB、AC、AD、A1、A2、BC、BD、B1、B2、CD、C1、C2、D1、D2、12  
 共 15 种搭配，其中纯字母或纯数字的搭配共：7 种

∴取得两个同色球的概率为  $\frac{7}{15}$



7. 如图：  $OA = AB \cdot \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

所以旋转体的体积为：  $\frac{1}{3}\pi (2\sqrt{3})^2 (OC - OB) = 10\pi$

8. 直线  $l_1: kx + y - 2k - 3 = 0$ , 即:  $k(x-2) + y - 3 = 0$

令  $x-2=0$  可以求出直线恒过定点  $M(2, 3)$

∵  $M(2, 3)$  与  $N(5, 6)$  都在直线  $l_2: y = x$  上方

∴ 设  $M(2, 3)$  关于直线  $l_2: y = x$  的对称点  $M_1$  为  $(a, b)$

$$\text{则} \begin{cases} \frac{2+a}{2} = \frac{3+b}{2} \\ \frac{3-b}{2-a} = -1 \end{cases} \Rightarrow M_1(3, 2)$$

∴ 直线  $M_1N$  的方程为:  $y = 2x - 4$

把直线  $M_1N$  与  $l_2: y = x$  联立可得  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$

可得 P 点坐标为  $(4, 4)$

故选 B 项

## 二、多项选择题

9	10	11	12
AB	BCD	ACD	BC

9. 由题意，变化幅度看折线图，越接近零轴变化幅度越小，越远离零轴变化幅度越大，位于零轴下方这表明价格下跌，位于零轴上方者表明价格上涨；平均价格看条形图，条形图越高其平均价格越高。故选择 AB

10.

A. 直线  $x = 0$  的倾斜角为  $90^\circ$ ，斜率不存在

B.  $4x - 2y + 3 = 0$  变形为  $2x - y + \frac{3}{2} = 0$ ，所以两直线直接的距离为:  $\frac{\frac{3}{2} - 1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

C. 由于点  $(1, 5)$  不满足  $k = \frac{y-5}{x-1}$ ，但可以满足  $y - 5 = k(x - 1)$ ，所以 C 错误

D. 纵截距是  $b$ , 可正、可负、可 0

故答案选择 BCD

11.  $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  平移后的图像为  $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ , 则周期为  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

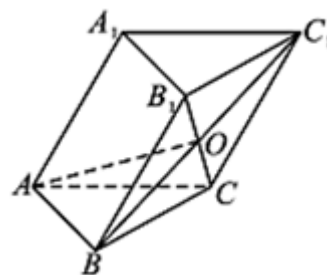
最大值为 1, 故 A 正确。

令  $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi$  推出  $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$ , 所以对称中心为  $(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0)$ , 若对称中心为  $(\frac{\pi}{3}, 0)$

则  $k = \frac{5}{6}$  不符, 故 B 错误。

令  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ . 推出  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$ , 所以 C 正确。

由正弦函数的单调区间可算出  $f(x)$  的单调区间为  $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in Z$ , 所以 D 选项正确。



12. 如图, 在斜三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中:

A.  $\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CC}_1) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

B.  $|\vec{AO}|^2 = [\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})]^2 = \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{11}{4}$ , 故  $|\vec{AO}| = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ,

B 正确

C.  $\because \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{b} - \vec{c}$

$\therefore \vec{AO} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 3$ , 又  $\because |\vec{BC}|^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2 = 5$

$\therefore |\vec{BC}| = \sqrt{5}$ ,

$\therefore \cos \langle \vec{OA}, \vec{BC} \rangle = \frac{3}{\frac{\sqrt{11}}{2} \times \sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{55}}{55}$ , 故 C 正确

D.  $\vec{AC}_1 = \vec{AA}_1 + \vec{AC} = \vec{b} + \vec{c}$

$\therefore |\vec{AC}_1|^2 = (\vec{b} + \vec{c})^2 = 4 + 4 + 4 = 12$ , 所以  $|\vec{AC}_1| = 2\sqrt{3}$ , 所以 D 错误

### 三、填空题

13	14	15	16
0 或 1	$\frac{3}{5}$	$(-\infty, -2) \cup (-2, \frac{8}{3})$	$\frac{5\sqrt{2}}{12}$

13. 由于直线 1 与直线 2 垂直, 所以  $m(m-2)+m=0$ , 解得  $m=0$  或  $m=1$

14. 取  $A_1B_1$  的中点 G, 连接 AG, FG, EG, 如图所示

$\because A_1G \parallel D_1E$ , 且  $A_1G = D_1E$

$\therefore$  四边形  $A_1GED_1$  为平行四边形

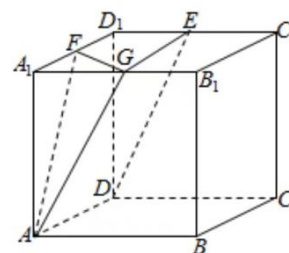
$\therefore AG \parallel DE$ , 即异面直线 DE 与 AF 所成角为  $\angle FAG$  或其补角

设正方形边长为 2, 则

$AF = AG = \sqrt{5}$ ,  $FG = \sqrt{2}$

所以在三角形 AGF 中, 由余弦定理可得

$$\cos \angle FAG = \frac{AF^2 + AG^2 - FG^2}{2AF \cdot AG} = \frac{4}{5}$$



$$\text{所以} \sin \angle FAG = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

15. 因为向量  $\vec{a} = (1, 1, 0)$ , 向量  $\vec{b} = (-1, 0, 3)$ , 所以  $k\vec{a} - \vec{b} = (k+1, k, -3)$ ;  $2\vec{a} + \vec{b} = (1, 2, 3)$

$$\text{由题意有} \cos \langle k\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b} \rangle = \frac{(k\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})}{|k\vec{a} - \vec{b}| \cdot |2\vec{a} + \vec{b}|} < 0$$

$$\text{即} (k\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) < 0, \therefore k+1+2k-9 < 0$$

$$\text{即} k < \frac{8}{3}$$

又因为  $(k\vec{a} - \vec{b})$  与  $(2\vec{a} + \vec{b})$  不共线, 所以  $\frac{k}{2} \neq \frac{-3}{3}$ , 即  $x \neq -2$

综上所述,  $k \in (-\infty, -2) \cup (-2, \frac{8}{3})$

16.

过点 P 向 y 轴作垂线 PC, 垂足为 C 点; 向 x 轴作垂线 PD, 垂足为 D

由题意:  $\angle CPB = \angle DAP = \alpha$

在直角三角形 BCP 与直角三角形 PDA 中

$$|\text{PB}| = \frac{|\text{CP}|}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}; \quad |\text{PA}| = \frac{|\text{PD}|}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin \alpha}$$

$$\therefore \frac{1}{|\text{PA}|} + \frac{1}{|\text{PB}|} = \frac{|\text{PA}| + |\text{PB}|}{|\text{PA}| \cdot |\text{PB}|}$$

$$\therefore |\text{PA}| \cdot |\text{PB}| = \frac{6}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{12}{\sin 2\alpha}$$

当  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  时,  $|\text{PA}| \cdot |\text{PB}|$  最小

$$\text{所以} \frac{1}{|\text{PA}|} + \frac{1}{|\text{PB}|} = \frac{|\text{PA}| + |\text{PB}|}{|\text{PA}| \cdot |\text{PB}|} = \frac{\frac{\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}}{12} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

#### 四、解答题

17. 解: (1) 利用点斜式可得 BC 直线方程为  $\frac{y+4}{-3+4} = \frac{x-0}{-3-0}$

整理可得  $3y+x+12=0$

(2) 由于  $k_{BC} = -\frac{1}{3}$

所以 BC 边上的高所在直线斜率为 3

所以设 BC 边上的高所在直线方程为:  $y = 3x + b$ , 把点 A (-2, 1) 带入求出  $b = 7$

所以 BC 边上的高所在直线方程为:  $y - 3x - 7 = 0$

18.

$$\begin{aligned}(1) f(x) &= \vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x \\ &= 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 则 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{所以对称轴方程为: } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

(2) 由题意有:

$$g(x) = 2 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] + 1 = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

$$\text{由于 } x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 故 } 2x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\therefore g(x) \text{ 的最小值为 } g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -2 + 1 = -1$$

$$g(x) \text{ 的最大值为 } g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + 1 = 3$$

$$\text{根据定义域, 则值域为: } g(x) \in (-1, 3]$$

19. (1) 证明:  $\because$  四边形 ABCD 的对角线互相平分,  $AC \cap BD = O$ ,

$\therefore O$  为 BD 的中点,

又  $\because M$  为 PD 的中点,

$\therefore OM \parallel PB$

$\because OM \not\subset$  平面 PBC

$PB \subset$  平面 PBC

$\therefore OM \parallel$  平面 PBC

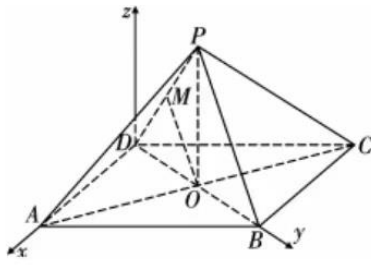
(2)  $\because$  在等腰直角三角形 PDB 中, 又 O 为 BD 的中点,

$\therefore PO \perp BD$ ,

又  $PO \perp AC$ ,  $\because AC \cap BD = O$ ,  $AC \subset$  平面 ABCD,  $BD \subset$  平面 ABCD,

$\therefore PO \perp$  平面 ABCD

以点 D 为坐标原点, 以 DA, DB 分别为 x 轴、y 轴, 过点 D 且与平面 ABCD 垂直的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系 D-xyz,



$\because AD=BD=2, AD \perp BD,$

$\therefore BC \perp BD, BC=2, AB=CD=2\sqrt{2},$

$\because PB \perp PD, PB=PD,$

$\therefore PB=PD=\sqrt{2}, PO=1,$

$\therefore AD=2, AD \perp BD, DO=1$

$\therefore AO=\sqrt{AD^2+OD^2}=\sqrt{5}=OC,$

$\therefore A(2, 0, 0), P(0, 1, 1), B(0, 2, 0), C(-2, 2, 0),$

$\therefore \vec{PA}=(2, -1, -1), \vec{PB}=(0, 1, -1), \vec{PC}=(-2, 1, -1)$

设平面 PAB 和平面 PBC 的法向量分别为  $\vec{n}=(x_1, y_1, z_1), \vec{m}=(x_2, y_2, z_2),$

$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PB} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ y_1 - z_1 = 0 \end{cases}$$

令  $y_1=1,$  可得  $\vec{n}=(1, 1, 1),$

同理可得:  $\vec{m}=(0, 1, 1)$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

所以二面角 C-BP-A 的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$20. (1) \because a^2 + b^2 + ab = c^2$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2}$$

$\because C \in (0, \pi)$

$$\therefore C = \frac{2}{3}\pi$$

$$(2) \because c=2a \cos b, b=2$$

$$\therefore c = 2a \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

可得  $a=b$

所以三角形 ABC 的面积为  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}.$

21. (1) 由题意可得  $(0.01+0.015+0.015+a+0.025+0.005) \times 10=1$

解得  $a=0.030$

根据频率分布直方图可知,  $[70,80)$ 分数段的频率最高, 因此众数为 75;

设第 75 百分位数为  $x$

则  $(0.01+0.015+0.015+0.03) \times 10+ (x-80) \times 0.025=0.75$

解得  $x=82$

(2) 因为总体为 60 名学生, 样本容量为 10, 因此抽样比为  $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

又因为在  $[50,70)$ 分数段共有  $60 \times (0.15+0.15) = 18$  人

所以在  $[50,70)$  分数段样本人数共有  $18 \times \frac{1}{6} = 3$  人

(3) 由分层随机抽样知  $[70,80)$ 分数段抽取  $60 \times 0.3 \times \frac{1}{6} = 3$  人,  $[80,100]$ 分数段抽取  $60 \times$

$(0.25+0.05) \times \frac{1}{6} = 3$  人

设  $[70,80)$ 分段抽取到的人为: 甲、A、B

$[80,100]$ 分段抽取到的人为: 乙、①、②

有如下几种搭配:

甲 A    甲 B    甲乙    甲①    甲②

AB    A乙    A①    A②

B乙    B①    B②

乙①    乙②

①②

共 15 种搭配, 其中至少有甲乙一人的搭配共 9 种

所以甲、乙至少一人被抽到的概率为  $\frac{9}{15}$

22.

(1) 证明:

$\because$  ①  $PE \perp EB$  ②  $PE \perp ED$  ③  $EB \cap ED = E$

$\therefore PE \perp$  面  $EBCD$ , 又  $\because BC \subset$  面  $EBCD$

$\therefore PE \perp BC$

又  $\because BC \perp BE$ , 故  $BC \perp$  面  $PEB$

$\because EM \subset$  面  $PEB$ ,  $\therefore EM \perp BC$

又因为三角形  $PEB$  为等腰三角形

$\therefore EM \perp PB$

$BC \cap PB = B$ , 故  $EM \perp$  面  $PBC$

$EM \subset$  面  $EMN$

故平面  $EMN \perp$  平面  $PBC$

(2) 假设存在 N 点, 使得二面角 B-EN-M 的余弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{6}$

因为  $PE \perp$  面 EBCD

所以建立空间直角坐标系 E-xyz

设  $PE=EB=2$ , 设  $N(2, m, 0)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $D(0, 2, 0)$

$P(0, 0, 2)$ ,  $C(2, 2, 0)$   $M(1, 0, 1)$

$\vec{EM} = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{EB} = (2, 0, 0)$ ,  $\vec{EN} = (2, m, 0)$

设平面 EMN 的法向量  $\vec{p} = (x, y, z)$

$$\text{由} \begin{cases} \vec{p} \cdot \vec{EM} = 0 \\ \vec{p} \cdot \vec{EN} = 0 \end{cases}$$

可解出  $\vec{p} = (m, -2, -m)$ ,

平面 BEN 的一个法向量为  $\vec{n} = (0, 0, 1)$

$$\text{所以} \left| \cos \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|0+0-m|}{\sqrt{m^2+4+m^2} \times \sqrt{0+0+1}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

解得  $m=1$

故存在 N 为 BC 的中点

