昆八中 2022-2023 学年度下学期月考一

特色高一数学试卷

（参考答案）

考试时间：120 分钟　　满分：150 分

命题教师：高二特色数学备课 审题教师：高二特色数学备课组

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．）

1. 复数z满足$z(1-i)=i$(i为虚数单位)，则 z 的虚部为 (　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}i$　　D. $-\frac{1}{2}i$

【答案】A

【解答】解：$z(1-i)=i\Rightarrow z=\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

故 z 的虚部为$\frac{1}{2}$.故选 A.

2. 函数$f(x)=\log_2 x-\frac{3}{x}$的零点所在区间 (　)

A. $(1,2)$　　B. $(2,3)$　　C. $(0,\frac{1}{2})$　　D. $(\frac{1}{2},1)$

【答案】B

【解答】解：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且函数$f(x)$单调递增，

$\because f(2)=\log_2 2-\frac{3}{2}<0$，$f(3)=\log_2 3-1=>0$，

$\therefore$在$(2,3)$内函数$f(x)$存在零点，故选：B.

3. 在$\triangle ABC$中，已知$BC=1$，$B=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$的面积为 $2\sqrt{3}$，则AC的长为(　)

A. 3　　B. $\sqrt{13}$　　C. $\sqrt{21}$　　D. $\sqrt{57}$

【答案】D

【解答】解：$\because BC=1$，$B=\frac{\pi}{3}$,

$\therefore\triangle ABC$的面积为 $2\sqrt{3}=\frac{1}{2}BC\cdot AB\cdot sinB=\frac{1}{2}\times AB\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore AB=8$，$\therefore$由余弦定理可得，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot cosB}$

$=\sqrt{64+1-2\times 8\times 1\times\frac{1}{2}}=\sqrt{57}$.

故答案选：D.

4. 已知向量$\vec{a}=(m+2,2)$，$\vec{b}=(2,5+m)$，则“$m=-6$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的（　）

A. 充分必要条件　　　　　B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解答】解：因为向量$\vec{a}=(m+2,2)$，$\vec{b}=(2,5+m)$，$\vec{a}//\vec{b}$，

所以 $4=(m+2)(5+m)$，即$m^2+7m+6=0$，

解得$m=-1$ 或$m=-6$，∴“$m=-6$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的充分不必要条件，

故选 C.

5. 若$z\in C$，且$|z|=2$，则$|z-5i|$的最小值是(　)

A. 2　　　B. 3　　　C. 4　　　D. 5

【答案】B

【解答】解：设复数$z=x+yi(x,y\in R)$，

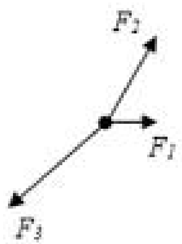
则$|z|=2$ 即$x^2+y^2=4$，表示以$(0,0)$为圆心，2 为半径为的圆，

$|z-5i|$表示点(x,y)与点$(0,5)$的距离，点$(0,5)$与$(0,0)$的距离为 5，

所以$|z-5i|$的最小值是 $5-2=3$.

故选 B.

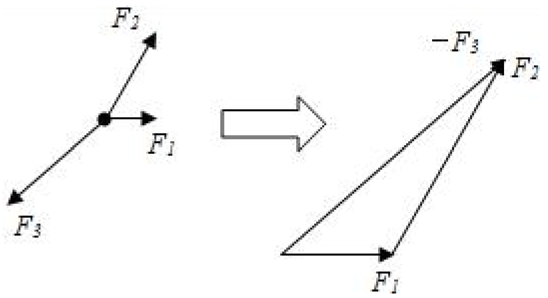
6. 一质点受到平面上的三个力$\vec{F_1}$，$\vec{F_2}$，$\vec{F_3}$(单位：牛顿)的作用而处于平衡状态.已知$\vec{F_2}$，$\vec{F_3}$成 165°角，且$\vec{F_2}$，$\vec{F_3}$的大小分别为 $2\sqrt{3}$和$\sqrt{6}+\sqrt{2}$，则$\vec{F_1}$的大小为（　）



A. $\sqrt{3}$　　　B. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$　　　C. $2\sqrt{3}$　　　D. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

【答案】D

【解答】解：如图，



由题意可得，$-\vec{F_1}=\vec{F_2}+\vec{F_3}$，

所以$|-\vec{F_1}|^2=\left|\vec{F_2}+\vec{F_3}\right|^2$

$$=|\vec{F_2}|^2+|\vec{F_3}|^2+2|\vec{F_2}||\vec{F_3}|cos165°$$

$$=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+2\times2\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\cos165°$$

$= 8 - 4\sqrt{3}$，$\therefore |\overrightarrow{F_1}| = \sqrt{6} - \sqrt{2}$，

故选 D.

7. 某地由于人们健康水平的不断提高，某种疾病的患病率正以每年 20%的比例降低．若要求患病率低于当前患病率的$\frac{1}{9}$，则至少需要经过的时间为(参考数据：$lg2 \approx 0.3$，$lg3 \approx 0.48$.)(   )

A. 6 年　　　　B. 8 年　　　　C. 10 年　　　　D. 12 年

【答案】C

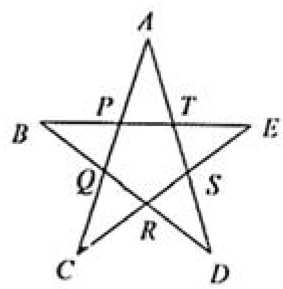
【解答】解：设现在的患病率为a，n年后患病率降低到原来的$\frac{1}{3}$，

所以$a(1-20\%)^n \le \frac{1}{9}a$，即$(\frac{4}{5})^n \le \frac{1}{9}$，

化简可得$n \ge \frac{-2lg3}{1g4-1g5} = \frac{-2lg3}{2lg2-(1-lg2)} \approx 9.6$，故至少需要经过 10 年．

故选：C.

8. 五角星是非常美丽的，我们的国旗上就有五颗，还有不少国家的国旗也用五角星，因为在五角星中可以找到许多线段之间的长度关系是符合黄金分割比的，也就是说正五边形对角线连满后出现的所有三角形，都是黄金分割三角形．如图所示的五角星中$\frac{PT}{BP}$、$\frac{PT}{AP}$、$\frac{TE}{TB}$等都是黄金分割比$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，已知五角星的顶角是 36°，则利用上面信息可求得$cos36° =$(   )



A. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　　　B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　　　C. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　　　D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【答案】A

【解析】【解答】解：由图形可知$A = 36°$，且$\frac{1}{2}\angle A = 18°$，

所以$sin18° = \frac{1}{2} \times \frac{PT}{AT} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$，

所以$cos36° = 1 - 2sin^2 18° = 1 - 2 \times (\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$，

故选：A.

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分。在每小题有多项符合题目要求）

9. 若函数$f(x) = \sqrt{3}\sin(2x-\theta) + \cos(2x-\theta)$为偶函数，则$\theta$的值可能为(   )

A. $-\frac{\pi}{3}$　　　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　　　D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】AC

【解答】解：函数$f(x)=\sqrt{3}\sin(2x-\theta)+\cos(2x-\theta)=2sin(2x-\theta+\frac{\pi}{6})$是偶函数，

所以$-\theta+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，解得$\theta=-k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$，

当$k=-1$时，$\theta=\frac{2\pi}{3}$，当$k=0$时，$\theta=-\frac{\pi}{3}$，当$k=1$时，$\theta=-\frac{4\pi}{3}$.

故答案选：AC.

10. 八卦是中国文化的基本哲学概念，如图①是八卦模型图，其平面图形记为图②中的正八边形$ABCDEFG$，其中$OA=1$，则下列结论正确的有(　)

图 1

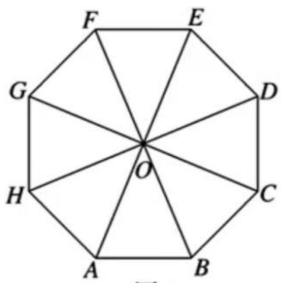


图 2

A. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}=-\sqrt{2}\overrightarrow{OE}$

C. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}$　　D. 向量$\overrightarrow{DE}$在向量$\overrightarrow{AB}$上的投影向量为$-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}$

【答案】ABD

【解答】解：图 2 中的正八边形$ABCDEFGH$，其中$|\overrightarrow{OA}|=1$，

对于A，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=1\times1\times\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 A 正确.

对于B，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}=\sqrt{2}\overrightarrow{OA}=-\sqrt{2}\overrightarrow{OE}$，故 B 正确.

对于C，$|\overrightarrow{AH}|=|\overrightarrow{BC}|$，$|\overrightarrow{HO}|=|\overrightarrow{BO}|$，但对应向量的夹角不相等，所以不成立，故 C 错误.

对于D，向量$\overrightarrow{DE}$在向量$\overrightarrow{AB}$上的投影向量是$|\overrightarrow{DE}|\cos\frac{3\pi}{4}\overrightarrow{AB}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}$，故 D 正确.

故选：ABD.

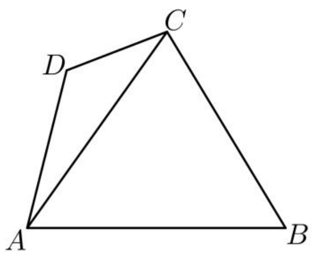
11. 如图所示，在ΔABC中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，$\sqrt{3}(a\cdot\cos C+c\cdot\cos A)=2b\cdot\sin B$，且满足$\angle CAB=\frac{\pi}{3}$.若点$D$是$\triangle ABC$外一点，$DC=1$、$DA=3$，下列说法中，正确的命题是(　)

A. 四边形$ABCD$周长的最小值为 8

B. 四边形$ABCD$周长无最大值

C. 四边形$ABCD$面积的最小值为$\sqrt{3}$

D. 四边形$ABCD$面积的最大值为$\frac{5\sqrt{3}}{2}+3$



【答案】BD

【解答】解：因为$\sqrt{3}(a\cos C+c\cos A)=2b\sin B$，由正弦定理得：$\sqrt{3}(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=2\sin^2B$，

所以$\sqrt{3}\sin(A+C)=\sqrt{3}\sin B=2\sin^2B$，易知 $\sin B>0$，则 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$，

又$\angle CAB=\frac{\pi}{3}$，则$B=\frac{\pi}{3}$，所以$\triangle ABC$的内角$C=\pi-A-B=\frac{\pi}{3}$，

所以$\triangle ABC$为等边三角形，设$\angle D=\theta$，在$\triangle ACD$中，

由余弦定理得$AC^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos\theta=10-6\cos\theta$，

四边形$ABCD$的周长为 $1+3+2\sqrt{10-6\cos\theta}=4+2\sqrt{10-6\cos\theta}$，$0<\theta<\pi,-1<\cos\theta<1$，

所以周长无最大值和最小值，A，B 错误；

所以四边形$ABCD$的面积为$S=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times1\times3\times\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}(10-6\cos\theta)$

$=\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{5\sqrt{3}}{2}=3sin(\theta-\frac{\pi}{3})+\frac{5\sqrt{3}}{2}$，当$\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$时，$3sin(\theta-\frac{\pi}{3})$取得最大值 3，

所以四边形$ABCD$的面积的最大值为$\frac{5\sqrt{3}}{2}+3$，故 D 正确，

由于$-\frac{\pi}{3}<\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，$3sin(\theta-\frac{\pi}{3})$没有最小值，$C$ 错误．

故选 BD．

12．已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-3x,x<0\\f(x-3),x\geq0\end{cases}$，以下结论正确的是（　）

A．$f(x)$在区间$[4,6]$上是增函数

B．$f(-2)+f(2020)=4$

C．若函数$y=f(x)-b$在$(-\infty,6)$上有 6 个零点$x_i(i=1,2,3,4,5,6)$，则$\sum_{i=1}^{6}x_i=9$

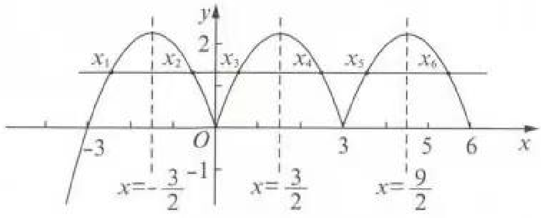
D．若方程$f(x)=kx+1$ 恰有 3 个实根，则$k\in(-1,-\frac{1}{3})$．

【答案】BC

【解答】解：由题意可知，当$x\geqslant-3$时，$f(x)$是以 3 为周期的函数，故$f(x)$在$[4，6]$上的单调性与$f(x)$在$[-2，0]$上的单调性相同，而当$x<0$时，$f(x)=-(x+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$，

$\therefore f(x)$在$[-2，0]$上不单调，故A错误；

又$f(2020)=f(-2)=2$，故$f(-2)+f(2020)=4$，故 B 正确；



作出$y=f(x)$的函数图象如图所示：

由于 $y=f(x)-b$ 在 $(-\infty,6)$ 上有 6 个零点，故直线 $y=b$ 与 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,6)$ 上有 6 个交点，不妨设 $x_i<x_{i+1}$，$i=1$，2，3，4，5，由图象可知 x_1，x_2 关于直线 $x=-\dfrac{3}{2}$ 对称，x_3，x_4 关于直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 对称，x_5，x_6 关于直线 $x=\dfrac{9}{2}$ 对称，$\therefore \sum\limits_{i=1}^{6}x_i=-\dfrac{3}{2}\times2+\dfrac{3}{2}\times2+\dfrac{9}{2}\times2=9$，故$C$正确；

若直线 $y=kx+1$ 经过点 $(3,0)$，则 $k=-\dfrac{1}{3}$，

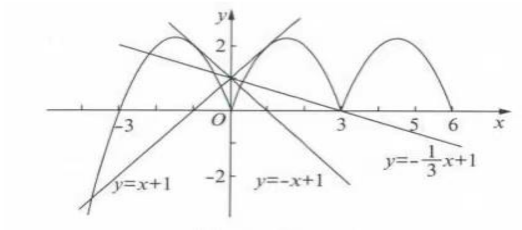
若直线 $y=kx+1$ 与 $y=-x^2-3x(x<0)$ 相切，则消元可得：$x^2+(3+k)x+1=0$，

令 $\Delta=0$ 可得 $(3+k)^2-4=0$，解得 $k=-1$ 或 $k=-5$，

当 $k=-1$ 时，$x=-1$，当 $k=-5$ 时，$x=1$（舍），故 $k=-1$.

若直线 $y=kx+1$ 与 $y=f(x)$ 在 $(0,3)$ 上的图象相切，

由对称性可得 $k=1$．为方程 $f(x)=kx+1$ 恰有 3 个实根，故直线 $y=kx+1$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点，

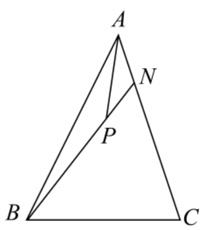


又直线$y=kx+1$ 过点$(3,0)$时，$k=-\frac{1}{3}$，$\therefore -1<k<-\dfrac{1}{3}$ 或 $k=1$，故D错误.

故选 BC.

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13．　如图，在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{7}\overrightarrow{NC}$，$P$是$BN$上一点，若$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则实数$t$的值为______.



【答案】$-\frac{1}{2}$

【解答】解：设$\overrightarrow{BP}=m\overrightarrow{BN}$，

由题意及图知，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+m(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB})=m\overrightarrow{AN}+(1-m)\overrightarrow{AB}$，

又$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{7}\overrightarrow{NC}$，$\therefore \overrightarrow{AN}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{2}{9}m\overrightarrow{AC}+(1-m)\overrightarrow{AB}$，又$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \begin{cases} 1-m=t \\ \frac{2}{9}m=\frac{1}{3} \end{cases}$，解得$m=\frac{3}{2}$，$t=-\frac{1}{2}$.

故答案为：$t=-\frac{1}{2}$.

14. 若函数$y=2sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$图象的一条对称轴为$x=\frac{\pi}{12}$，则$\varphi=$_____.

【答案】$\frac{\pi}{3}$

【解答】解：函数$y=2sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的对称轴方程为：$2x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，

解得$x=\frac{k\pi-\varphi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z$，

又函数$y=2sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的一条对称轴为$x=\frac{\pi}{12}$，

$\therefore$当$k=0$时，由$\frac{-\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$，得$\varphi=\frac{\pi}{3}$，符合题意；

故答案为$\frac{\pi}{3}$.

15. 已知$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$，$AB=2$，$AC=4$，则$\triangle ABC$中线AD长的值为_____.

【答案】$\sqrt{7}$或$\sqrt{3}$

【解答】解：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times \sin A=4\sin A=2\sqrt{3}\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$A=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$，

若$A=\frac{\pi}{3}$，则$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\times AC\times \cos A}=2\sqrt{3}$，

此时$AD=\sqrt{\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2}=\sqrt{7}$，

若$A=\frac{2\pi}{3}$，同理可得$BC=2\sqrt{7}$，此时$AD=\sqrt{3}$，

故答案为$\sqrt{7}$或$\sqrt{3}$.

16. 已知实数x，y满足$x^2+y^2-xy=3$，则$S=x^2y^2-4xy$的取值范围为 _____.

【答案】$[-4,5]$

【解答】解$\because x^2+y^2-xy=3$，$\therefore x^2+y^2=xy+3$，

又$\because x^2+y^2=|x|^2+|y|^2\geq 2|x||y|=2|xy|$，

$\therefore xy+3\geq 2|xy|$，

①若$xy\geq 0$时，$xy+3\geq 2xy$，$\therefore xy\leq 3$，

②$xy<0$时，$xy+3\geq -2xy$，$\therefore xy\geq -1$，

$\therefore -1\leq xy\leq 3$，

设$t = xy$，则$S = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$，$t \in [-1,3]$，

$\therefore$当$t = -1$时，$S_{max} = 9 - 4 = 5$，

$\therefore S$的取值范围为$[-4,5]$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 72.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (本小题 10 分)

已知向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$|\vec{a}| = 1$，$|2\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$.

(1)求$|\vec{b}|$；

(2)若$\vec{a} \perp (\vec{a} - \lambda\vec{b})$，求$\lambda$.

【答案】解：(1)由$|2\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$，得$4\vec{a}^{\,2} - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = 12$，............................2 分

化简得$|\vec{b}|^2 - 2|\vec{b}| - 8 = 0$，............................4 分

解得$|\vec{b}| = 4$或$|\vec{b}| = -2$(舍去)，

$\therefore |\vec{b}| = 4$；............................6 分

(2)由$\vec{a} \perp (\vec{a} - \lambda\vec{b})$得$\vec{a}\cdot(\vec{a} - \lambda\vec{b}) = 0$，

那么$\vec{a}^2 - \lambda\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$，............................8 分

因此$1 - 2\lambda = 0$；

解得$\lambda = \frac{1}{2}$. ....10 分

18. (本小题 12 分)

已知三角形ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$a\cos B + b\cos A = 2c\cos B$.

(1)求角B；

(2)若$A = \frac{\pi}{4}$，角B的角平分线交AC于点D，$BD = \sqrt{2}$，求CD的长.

【答案】解：(1)因为$a\cos B + b\cos A = 2c\cos B$，

所以由正弦定理可得$\sin A\cos B + \sin B\cos A = 2\sin C\cos B$，............................2 分

所以$\sin(A + B) = 2\sin C\cos B$，............................3 分

即$\sin C = 2\sin C\cos B$，............................4 分

因为$0 < C < \pi$，

所以$\sin C > 0$，故$\cos B = \frac{1}{2}$，............................5 分

因为$0 < B < \pi$，

所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ....6 分

(2)由(1)可知 $\angle ABD=\angle CBD=\frac{\pi}{6}$，............................7 分

又 $A=\frac{\pi}{4}$；

所以 $\angle ADB=\frac{7\pi}{12}$，$\angle CDB=\frac{5\pi}{12}$，$\angle BCD=\frac{5\pi}{12}$，............................8 分

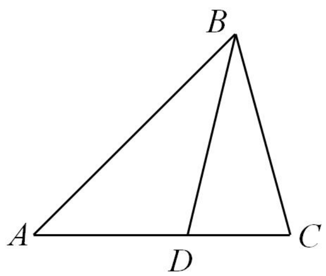
所以 $BC=BD=\sqrt{2}$，............................9 分

在 $\triangle BCD$，由余弦定理可

得 $CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos\angle CBD$，............................10 分

即 $CD^2=2+2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$，......................11 分

解得 $CD=\sqrt{3}-1$. ....12 分



19. (本小题 12 分)

已知幂函数$f(x)=x^{-2m^2+m+3}(m\in Z)$是奇函数，且$f(2)<f(3)$.

(1)求m的值，并确定$f(x)$的解析式；

(2)求$y=[\log_2 f(x)]^2+\log_{\frac{1}{2}}[2f(x)]$，$x\in[\frac{1}{2},2]$的值域.

【答案】

解：(1)因为幂函数$f(x)=x^{-2m^2+m+3}(m\in Z)$，$f(2)<f(3)$，........................2 分

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$-2m^2+m+3>0$，即$(2m-3)(m+1)<0$，............................3 分

解得$-1<m<\frac{3}{2}$.

又$m\in Z$，所以$m=0$ 或$m=1$. ....4 分

当$m=0$ 时，$f(x)=x^3$，满足$f(-x)=-x^3=-f(x)$，因此$f(x)=x^3$是奇函数；

当$m=1$ 时，$f(x)=x^{-2+1+3}=x^2$，显然是偶函数. .... 5 分

所以$m=0$，$f(x)=x^3$. .... 6 分

(2)因为$f(x)=x^3$，所以$y=(\log_2 x^3)^2+\log_{\frac{1}{2}}(2x^3)$

$=9(\log_2 x)^2-1-3log_2 x$.. .... 8 分

令$t=\log_2 x$，因为$x\in[\frac{1}{2},2]$，所以$t\in[-1,1]$，

所以$y=9t^2-3t-1=9(t-\frac{1}{6})^2-\frac{5}{4}$， .... 9 分

所以$y=9t^2-3t-1$ 在$t\in[-1,\frac{1}{6})$上单调递减，在$(\frac{1}{6},1]$上单调递增， .... 10 分

因此当$t=\frac{1}{6}$时，$y_{min}=-\frac{5}{4}$;

又当$t=-1$ 时，$y=9+3-1=11$； .... 11 分

当$t=1$ 时，$y=9-3-1=5$，因此$y_{max}=11$，

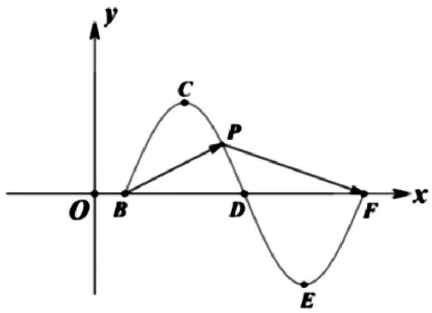
所求函数的值域为$[-\frac{5}{4},11]$. .... 12 分

20. (本小题 12 分)

已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$的图象如下图所示，点$B$，$D$，$F$为$f(x)$与$x$轴的交点，点$C$，$E$分别为$f(x)$的最高点和最低点，若将其图象向右平移$\frac{1}{2}$个单位后得到函数$g(x)$的图象，而函数$g(x)$的最小正周期为 4，且在$x=0$ 处取得最小值.

(1)求参数ω和φ的值；

(2)当$x\in[0,\frac{13}{6}]$时，方程 $2f(x)-3=m$有两个不同的实根，求m的取值范围.



【答案】解：(1)设$g(x)=2\sin(\omega x+\varphi')$，

由于$g(x)$的最小正周期为 4，且$g(0)=-2$，

则$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$， .... 2 分

$\varphi'=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$， .... 4 分

因为将函数$g(x)$图象向左平移$\frac{1}{2}$个单位后得到函数$f(x)$的图象，

所以$f(x)=2\sin(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}+2k\pi)=2\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}+2k\pi)$，$k\in Z$，

又由于$|\varphi|<\pi$，则$\varphi=-\frac{\pi}{4}$. .... 6 分

(2)当$x\in[0,\frac{13}{6}]$时，方程 $2f(x)+3=m$有两个不同的实根，

即方程$f(x)=\frac{m+3}{2}$在$[0,\frac{13}{6}]$上有两个不同的实根，

由(1)知，$f(x)=2\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4})$，

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+2k\pi$，解得$-\frac{1}{2}+4k\leqslant x<\frac{3}{2}+4k$，$k\in Z$，……………………8 分

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，解得$\frac{3}{2}+4k\leqslant x<\frac{7}{2}+4k$，$k\in Z$，

则函数$f(x)$在$\left[0,\frac{3}{2}\right)$上单调递增，在$\left[\frac{3}{2},\frac{13}{6}\right]$上单调递减，

可得$f(x)_{\max}=f(\frac{3}{2})=2\sin(\frac{\pi}{2}\times\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4})=2$，$f(0)=2\sin(-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$，……………… 10 分

$f(\frac{13}{6})=2\sin(\frac{\pi}{2}\times\frac{13}{6}-\frac{\pi}{4})=1$，所以 $1\leqslant\frac{m+3}{2}<2$，解得$-1\leqslant m<1$，

则m的取值范围为$[-1,1)$． …………………………12 分

21. （本小题 12 分）

锐角$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$b-2c\cos A=c$．

(1)证明：$A=2C$;

(2)求$\frac{1}{\tan C}-\frac{1}{\tan A}+\sin A$的取值范围．

【答案】解：(1)证明：由已知及正弦定理得 $\sin B-2\sin C\cos A=\sin C$，………………2 分

$\therefore\sin(A+C)-2\sin C\cos A=\sin C$，…………………………4 分

$\therefore\sin(A-C)=\sin C$，…………………………5 分

$\therefore A-C=C$即$A=2C$． …………………………6 分

(2) $\frac{1}{\tan C}-\frac{1}{\tan A}+\sin A=\frac{1}{\tan C}-\frac{1}{\tan 2C}+\sin A$. …………………………7 分

$=\frac{1}{\tan C}-\frac{1-\tan^2C}{2\tan C}+\sin A=\frac{1+\tan^2C}{2\tan C}+\sin A$. …………………………8 分

$=\frac{1}{2\sin C\cos C}+\sin A=\frac{1}{\sin A}+\sin A$，…………………………9 分

设 $\sin A=t$，$\because\triangle ABC$是锐角三角形，

$\therefore A\in(0,\frac{\pi}{2})$，$C=\frac{A}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，$B=\pi-A-\frac{A}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，

$\therefore A \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$，则 $\sin A = t \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$，............................10 分

$\because y = \frac{1}{t} + t$在$(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$单调递减，........................11 分

$\therefore \frac{1}{\tan C} - \frac{1}{\tan A} + \sin A = \frac{1}{t} + t \in (2, \frac{7\sqrt{3}}{6})$.............................12 分

22. (本小题 12 分)

5G技术的价值和意义是在自动驾驶、物联网等领域.其数学原理之一是香农公式：$C = Wlog_2(1 + \frac{P}{N})$，其中：$C$(单位：$bit/s$)是信道容量或者叫信道支持的最大速度，$W$(单位；$HZ$)是信道的带宽，$P$(单位：$dB$)是平均信号率，$N$(单位：$dB$)是平均噪声功率，$\frac{P}{N}$叫做信噪比.

(I)根据香农公式，如果不改变带宽W，那么将信噪比$\frac{P}{N}$从 1023 提升到多少时，信道容量C能提升 10%？

(II)已知信号功率$P = P_1 + P_2$，证明：$Wlog_2(1 + \frac{P}{N}) = Wlog_2(1 + \frac{P_1}{N}) + Wlog_2(1 + \frac{P_2}{N+P_1})$；

(III)现有 3 个并行的信道上X_1，X_2，X_3，它们的信号功率分别为P_1，P_2，$P_3(P_1 < P_2 < P_3)$，这 3 个信道上已经有一些噪声或者信号功率.根据(II)中结论，如果再有一小份信号功率，把它分配到哪个信道上能获得最大的信道容量？

【答案】解：(I)当$\frac{P}{N} = 1023$ 时，$C = Wlog_2 1024 = 10W$，

令$Wlog_2(1 + \frac{P}{N}) = 10W(1 + 10\%)$，得$Wlog_2(1 + \frac{P}{N}) = 11W$，............................2 分

解得$\frac{P}{N} = 2^{11} - 1 = 2047$，..........................3 分

所以若不改变带宽W，将将信噪比$\frac{P}{N}$从 1023 提升到 2047 时，信道容量C能提升 10%. ....4 分

(II)证明：右边$= Wlog_2(1 + \frac{P_1}{N}) + Wlog_2(1 + \frac{P_2}{N+P_1})$

$= Wlog_2(1 + \frac{P_1}{N})(1 + \frac{P_2}{N+P_1})$..........................5 分

$= Wlog_2(1 + \frac{P_1}{N} + \frac{P_2}{N+P_1} + \frac{P_1}{N} \cdot \frac{P_2}{N+P_1})$..........................6 分

$= Wlog_2[1 + \frac{P_1(N+P_1)+P_2N+P_1P_2}{N(N+P_1)}]$..........................7 分

$= Wlog_2[1+\frac{(P_1+N)(P_1+P_2)}{N(N+P_1)}]$.............................8 分

$= Wlog_2[1+\frac{(P_1+P_2)}{N}] = Wlog_2(1+\frac{P}{N})$ =左边，

所以，原式成立. ....9 分

(III)由(II)可知当$P=P_1+P_2$时，$Wlog_2(1+\frac{P}{N}) < Wlog_2(1+\frac{P_1}{N}) + Wlog_2(1+\frac{P_2}{N})$，随着$P$的增大$C$也会增大，可是增加的速度会越来越慢，.............................11 分

所以把那一小份分配到信道X_1上能获得最大的信道容量.

分配到信道X_1上能获得最大的信道容量. ....12 分