昆八中 2022-2023 学年度下学期期中考

高一数学参考答案

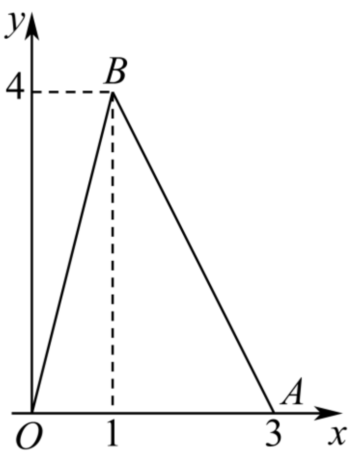
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

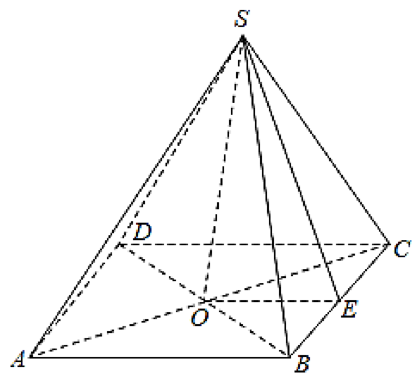
1.【答案】A【解析】由题意，$N=\left\{x\mid x^2-x-6<0\right\}=\{x\mid(x-3)(x+2)<0\}=\{x\mid -2<x<3\}$，

$\therefore M\cup N=\{x\mid -4<x<3\}$，故选：A

2.【答案】C【解析】$z=\mathrm{i}\left(\mathrm{i}+\dfrac{1}{\mathrm{i}^2}\right)=-1-\mathrm{i}$，所以复数 z 在复平面上对应的点坐标为(-1,-1),位于第三象限.

3.【答案】D【解析】根据直观图的画法，可以得到直角坐标系下 $A(3,0),B(1,4)$，如图所示，故原三角形面积为：$S=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$





4.【答案】B【解析】设正四棱锥为 $S-ABCD$，斜高为 SE，设 $AB=a$，正四棱锥的高为 SO，

因为侧面是正三角形，所以三角形 SBC 是正三角形，则有 $SE=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=\sqrt{3}$，因此 $a=2$，

$OE=\dfrac{a}{2}=1,SO=\sqrt{3-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，所以这个四棱锥体积为 $V=\dfrac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times2^2=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.故选：B

5.【答案】D【解析】因为 $\cos2\alpha+3\sin2\alpha=1$，由二倍角公式可得：

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+6\sin\alpha\cos\alpha=1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$，化简整理可得：$\sin\alpha(\sin\alpha-3\cos\alpha)=0$，

因为 $\alpha\in[0,\pi]$，所以 $\sin\alpha=0$ 或 $\sin\alpha=3\cos\alpha$，当 $\sin\alpha=3\cos\alpha$ 时，由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得：

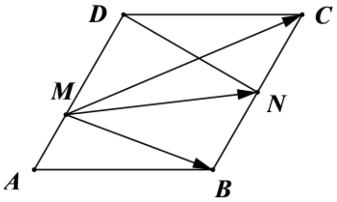
$\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin\alpha=0$ 或 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，故选：D .

6.【答案】B【解析】解：由正弦定理得 $\sin A+\sin B=\dfrac{\sin A}{\tan A}+\dfrac{\sin B}{\tan B}=\cos A+\cos B$，整理得：

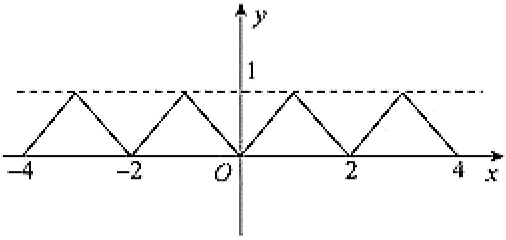
$\sin A-\cos A=-\sin B+\cos B$，即 $\sqrt{2}\sin\left(A-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(B-\dfrac{\pi}{4}\right)$，又因为 $A,B\in(0,\pi)$,所以

$\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ $\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$,所以$\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=-\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$，移项得：$A+B=\frac{\pi}{2}$,所以三角形一定为直角三角形.故选：B

7.【答案】A【解析】取 BC 的中点为 N,连接 DN,由 $DC=2,NC=1,\angle DCN=60°$，可知 $DN=\sqrt{3}$,且 $DN\perp CN$，$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)=\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NB}\right)=\overrightarrow{MN}^2-\overrightarrow{NB}^2$，∴当 M 与 D 重合时，MN 最小，此时 $\overrightarrow{MB\cdot MC}$ 取得最小值 $3-1=2$，故选：A.



8.【答案】C【解析】据题意得函数 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如下图所示.



数形结合易知 $f(x)\in[0,1]$，则 $\operatorname{sgn}\left(f(x)\right)=0$ 或 $\operatorname{sgn}\left(f(x)\right)=1$，故 A 错误；

$f\left(\frac{4041}{2}\right)=f\left(2020\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，故 B 错误；

$f(2k)=0(k\in Z)$，则 $\operatorname{sgn}\left(f(2k)\right)=0(k\in Z)$，故 C 正确；

$\operatorname{sgn}k=\begin{cases}1,k>0\\0,k=0,\ (k\in Z)\\-1,k<0\end{cases}$,所以$\left|\operatorname{sgn}k\right|=\begin{cases}1,k\neq0\\0,k=0\end{cases}(k\in Z)$，

所以 $\operatorname{sgn}\left(f(2k)\right)\neq\left|\operatorname{sgn}k\right|(k\in Z)$，故 D 错误．故选 C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，选对但不全得 2 分，有选错的得 0 分。

9.【答案】BD【解析】对 A，将 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上的点向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，再将横坐标伸长到原来的 2 倍得到 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，故 A 错；

对 B，向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，再把横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故 B 正确；

对 C，将横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$得到$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，再将图象上的所有的点向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到$y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$的图象，故 C 错误；

对 D，将横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$得到$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，再将图象上的所有的点向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到$y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，故 D 正确；

故选 BD

10.【答案】ABC【解析】若正方体的棱长为 2，则：

①若球为正方体的外接球，则外接球直径等于正方体体对角线，即$2R=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$，故 A 正确，外接球体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，故 D 错误；

②若球为正方体的内切球，则内切球半径为棱长的一半，故内切球的表面积为$4\pi R^2=4\pi$，故 B 正确；

③若球与正方体的各棱相切，则球的直径等于正方形对角线长，即$R=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，球的半径为$R=\sqrt{2}$，故 C 正确.

故选 ABC.

11.【答案】BD【解析】对于 A，因为$\vec{a}=(1,x-1)$，$\vec{b}=(x+1,3)$，且$\vec{a}$，$\vec{b}$共线，则$1\times3=(x-1)(x+1)$解得$x=\pm2$.

对于 B，因为$|\vec{b}|=2|\vec{a}|=2$，所以$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{1-8\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+16}$

$=\sqrt{17-8\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}\le\sqrt{17+8}=5$，所以$|\vec{a}-2\vec{b}|$的最大值是 5.

对于 C，由$(\vec{a}-2\vec{b})^2=7$，以及$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，可得$1+4-4\vec{a}\cdot\vec{b}=7$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=-\frac{1}{2}$，即$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=-\frac{1}{2}$，又$0^\circ\le\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\le180^\circ$，所以夹角$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=120^\circ$.

对于 D，$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$|\vec{a}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\times\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\times\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{17}}\times\frac{\vec{b}}{\sqrt{17}}=-\frac{2}{17}\vec{b}=\left(-\frac{8}{17},-\frac{2}{17}\right)$.

故选 BD.

12.【答案】ABD【解析】$\because a^2+b^2\ge2ab,\therefore 2\left(a^2+b^2\right)\ge(a+b)^2,\therefore(a+b)^2\le2$，

又$\because a>0,b>0,\therefore a+b\le\sqrt{2},$ 故 A 正确；

$\because a>0$，$b>0$，且$a^2+b^2=1$，$\therefore 0<a<1,0<b<1,\therefore -1<a-b<1,\therefore \frac{1}{2}<2^{a-b}<2$，故 B 正确；

$a^2-b^2>-b^2>-1$,故 D 正确；

C 等价于 $\log_2\sqrt{ab}\geq-\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{2}\log_2 ab\geq-\frac{1}{2},\log_2 ab\geq-1$，

等价于 $ab\geq\frac{1}{2}$,但当 $a=\frac{3}{5},b=\frac{4}{5}$ 时，满足条件 $a>0$， $b>0$，且 $a^2+b^2=1$， $ab=\frac{12}{25}<\frac{1}{2}$,故 C 错误；

故选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13.【答案】-1【解析】$2^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{x}+1}=2^{\frac{1}{x}-1}$，$\therefore x=\frac{1}{x}-1$,$\therefore x^2+x-1=0$,$\therefore x_1+x_2=-1$,故答案为：$-1$.

14.【答案】45π【解析】设圆台的两底面半径分别为 r_1,r_2,则侧面积 $\pi\left(r_1+r_2\right)l=\pi\left(r_1+r_2\right)\times5=45\pi$，

$\therefore r_1+r_2=9$；又∵圆台的高为 4，母线长为 5，$\therefore h^2+\left(r_1-r_2\right)^2=l^2$,即 $16+\left(r_1-r_2\right)^2=25$,$\therefore\left(r_1-r_2\right)^2=9$，

$\therefore 2\left(r_1^2+r_2^2\right)=\left(r_1-r_2\right)^2+\left(r_1+r_2\right)^2=9+81=90$,$\therefore r_1^2+r_2^2=45$，

∴圆台的上下底面积的和为 $\pi r_1^2+\pi r_2^2=45\pi$.

15.【答案】②④【解析】首先，因为函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\pi,2\pi\right)$ 上单调，显然 $T\geq2\pi$，故 $\omega=\frac{2\pi}{T}\leq1$，

其次，还应满足 $-\frac{\pi}{2}+k\pi\leq\omega\pi+\frac{\pi}{4}<2\omega\pi+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in Z\right)$，

解得 $-\frac{3}{4}+k\leq\omega\leq\frac{1}{8}+\frac{k}{2}\left(k\in Z\right)$，因为 $\frac{1}{4}<\omega\leq1$，故唯有 $k=1$，故 $\frac{1}{4}<\omega\leq\frac{5}{8}$，故①错；

且因为 $k=1$，所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\pi,2\pi\right)$ 上单调递减，故②对；

当 $x\in\left(0,\pi\right)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $\frac{1}{4}<\omega\leq\frac{5}{8}$，得 $\frac{\pi}{2}<\omega\pi+\frac{\pi}{4}\leq\frac{7\pi}{8}$，

所以 $x\in\left(0,\pi\right)$ 时，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\pi\right)$ 上没有零点，故③错；

由③可知 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\pi\right)$ 上的最大值一定为 1，故④对.

综上，正确的是②④.

16.【答案】$\frac{24}{25}$【解析】函数 $f(x)=\sin x$,取 $x_1=0,x_2=\frac{\pi}{2},x_3=\pi$，

$y_1=f(0)=0,y_2=f(\frac{\pi}{2})=1,y_3=f(\pi)=0$，

故 $k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2}{\pi},k=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=-\frac{2}{\pi},k_3=\frac{k-k_1}{x_3-x_1}=-\frac{4}{\pi^2}$

即 $\sin x\approx-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{4}{\pi}x\therefore\sin\frac{2\pi}{5}\approx-\frac{4}{\pi^2}(\frac{2\pi}{5})^2+\frac{4}{\pi}\times(\frac{2\pi}{5})=\frac{24}{25}$.

四、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或验算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

(1) ∵点 M,N 分别为线段 A_1B， AC_1 的中点, ∴ $MN\parallel BC$,

又∵ $MN\not\subset$ 平面 BB_1C_1C， $BC\subset$ 平面 BB_1C_1C，

∴ $MN\parallel$ 平面 BB_1C_1C. ………………………………………………………………………… 5 分

(2) ∵ $DN\parallel$ 面 ABB_1A_1， $DN\subset$ 平面 A_1BC，平面 $ABB_1A_1\cap$ 平面 $A_1BC=A_1B$， ∴ $DN\parallel A_1B$，

又∵ $MN\parallel BC$， ∴四边形 $MNDB$ 为平行四边形，

∴ $BD=MN$,又∵ MN 为 A_1BC 的中位线， $\therefore BC=2MN,\therefore BC=2BD,\therefore CD=DB$，

∴ $\dfrac{CD}{DB}=1$. ……………………………………………………………………………………… 10 分

18.（本小题满分 12 分）

(1) 因为 $a\cos B=(2c-b)\cos A$，所以 $\sin A\cos B=2\sin C\cos A-\sin B\cos A$，

所以 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$，所以 $\sin C=2\sin C\cos A$ 且 $\sin C>0$，

所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$， 又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………………………………… 6 分

(2) 因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， 所以 $b^2+c^2-bc=7$，

又因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$， 所以 $bc=6$，

所以 $\begin{cases}b^2+c^2=13\\ bc=6\end{cases}$， 所以 $b+c=\sqrt{b^2+c^2+2bc}=5$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为： $a+b+c=5+\sqrt{7}$. ……………………………………………………… 12 分

19.（本小题满分 12 分）

(1) $f(x)=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}=\sin 2x-2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\sqrt{3}=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

……………………………………………………………………………………………………… 3 分

所以，函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

解不等式 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in Z)$， 得 $k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\dfrac{11\pi}{12}\ (k\in Z)$.

因此，函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi+\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{11\pi}{12}\right](k\in Z)$. ……………………………… 7 分

(2) 当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时， $\dfrac{2\pi}{3}\le 2x-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{5\pi}{3}$， 所以

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ 时，即当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $y=f\left(x\right)$ 取得最大值，最大值为 $\sqrt{3}$，

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$ 时，即当 $x=\frac{11\pi}{12}$ 时，函数 $y=f\left(x\right)$ 取得最小值，最小值为 -2． ………………………12 分

20．（本小题满分 12 分）

(1) $\because b^2=a^2+c^2-\frac{2}{3}ac\Rightarrow \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{3}$，

在 $\triangle ABC$ 中,设 $BC=a$，$AC=3m$ 由余弦定理可得：$9m^2=a^2+4-\frac{4}{3}a$ ①

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DBC$ 中，由余弦定理可得：$\cos\angle ADB=\dfrac{4m^2+\frac{16}{3}-4}{\frac{16\sqrt{3}m}{3}},\cos\angle BDC=\dfrac{m^2+\frac{16}{3}-a^2}{\frac{8\sqrt{3}m}{3}}$，

又因为 $\cos\angle ADB+\cos\angle BDC=0$，

$\therefore \dfrac{4m^2+\frac{16}{3}-4}{\frac{16\sqrt{3}m}{3}}+\dfrac{m^2+\frac{16}{3}-a^2}{\frac{8\sqrt{3}m}{3}}=0$ 得 $3m^2-a^2=-6$②，

由①②得 $a=3,m=1$， $\therefore BC=3$. ……………………………………………………………………6 分

(2) $\because \cos B=\frac{1}{3},B\in\left(0,\pi\right)\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

由 $b^2=a^2+c^2-\frac{2}{3}ac\Rightarrow 4=a^2+c^2-\frac{2}{3}ac\geq 2ac-\frac{2}{3}ac=\frac{4}{3}ac$，所以 $ac\leq 3$（当且仅当 $a=c$ 取等号）.

由 $AD=2DC$，可得 $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}ac\sin B\leq\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times 3=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore \triangle DBC$ 的面积最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$. ……………………………………………………………………12 分

21．（本小题满分 12 分）

(1) 由题意 $\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\end{cases}$，解得 $-1<x<1$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-1,1\right)$. ……………………………2 分

因为函数 $y=\ln(1+x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增，函数 $y=\ln(1-x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，

所以 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增.

又 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$， $\ln 3=f\left(\frac{1}{2}\right)$，所以原不等式可化为 $f(2x-1)>f\left(\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\begin{cases}-1<2x-1<1\\2x-1>\frac{1}{2}\end{cases}$，解得 $\frac{3}{4}<x<1$，

所以原不等式解集为 $\left\{x\middle|\frac{3}{4}<x<1\right\}$. ………………………………………………………6 分

(2) $g(x)=-ax^2-6(x-1)e^{\ln\frac{1+x}{1-x}}-5=-ax^2+6x+1$

由题意，$g(x)$的图象始终在x轴的上方，

即$g(x)>0$对$x\in(-1,1)$恒成立，所以有$-ax^2+6x+1>0$

当$x=0$时，上式显然成立；

当$x\neq 0$时，$a<\dfrac{6x+1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{6}{x}$，

令$\dfrac{1}{x}=t$，因为$x\in(-1,1)$，所以$t\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，

令$h(t)=t^2+6t$，$t\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，即$a<h(t)_{\min}$，

当$t=-3$时，$h(t)_{\min}=h(-3)=-9$，

所以实数a的取值范围是$a\in(-\infty,-9)$． ……………………………………………………………………12 分

22．（本小题满分 12 分）

(1)由题意，符合公司要求的模型只需当$x\in[10，1000]$时，满足：

①函数为增函数；②函数的最大值不超过 5；③$y\leq 25\%x$

对于$y=1.002^x$，易知满足①；但当$x>900$时，$y>6$，不满足公司的要求；

对于$y=\lg x+3$，易知满足①，当$x\in(100,1000]$时，$y>\lg 100+3=5$，不满足公司的要求；

对于$y=\dfrac{\sqrt{10}}{20}x^{\frac{1}{2}}$，易知满足①，当$x\in[10，1000]$时，$y\leq\dfrac{\sqrt{10000}}{20}=5$，故满足②，又$x\in[10，1000]$时，$y=\dfrac{\sqrt{10x}}{20}\leq\dfrac{5\sqrt{x}}{20}=\dfrac{\sqrt{x}}{4}\leq\dfrac{x}{4}$由此可知满足③.

综上所述，只有奖励模型：$y=\dfrac{\sqrt{10x}}{20}$能完全符合公司的要求. ……………………………………………… 6 分

(2) 由(1)知：符合要求的函数为$y=\dfrac{\sqrt{10}}{20}x^{\frac{1}{2}}$，故$\dfrac{y}{x}=\dfrac{\frac{\sqrt{10}}{20}x^{\frac{1}{2}}}{x}=\dfrac{\sqrt{10}}{20}x^{-\frac{1}{2}}$，

当$x\in[10，1000]$时，$\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sqrt{10}}{20\sqrt{x}}$单调递减，

故当$x=10$时，取最大值为$\dfrac{1}{20}$． ……………………………………………………………………………12 分