昆八中 2022-2023 学年度下学期期中考

高二数学答案

考试时间：150 分钟　满分：120 分　　命题/审题教师：　高一平行数学备课组

一、单选题

1-8 ABCA　CDCC

二、多选题

9.BC　　10.BD　　11.ABD　12.BCD

三、填空题

13．$2n-1$　　　14．6　　　15．240　　　16．10 或 17

四、解答题

17．$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a\cos C+c\cos A=2b\cos B$.

（1）求 B;

（2）若 $b=2\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【详解】解：（1）$\because a\cos C+c\cos A=2b\cos B$，

由正弦定理得：$\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B\cos B$，

整理得：$\sin\left(A+C\right)=2\sin B\cos B=\sin B$，

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$0<B<\pi$，

$\therefore \sin B\neq 0$，

即 $2\cos B=1$，

$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$，

即 $B=\dfrac{\pi}{3}$；(5 分)

（2）由余弦定理得：$\left(2\sqrt{3}\right)^2=a^2+c^2-2ac\cdot\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \left(a+c\right)^2-3ac=12$，

$\because S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=2\sqrt{3}$，

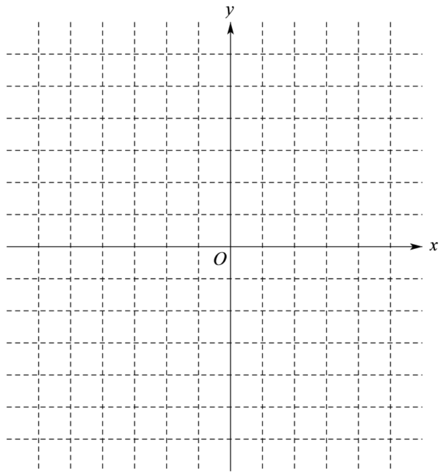
$\therefore ac=8$，

$\therefore \left(a+c\right)^2-24=12$，

$\therefore a+c=6$，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $6+2\sqrt{3}$.(10 分)

18．已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)\mathrm{e}^{x}$．



(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间和极值：

(2)在坐标系中画出函数 $f\left(x\right)$ 的简图（要含有必要的说明和体现必要的图象特征）；

(3)若 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-a$，讨论函数 $g\left(x\right)$ 的零点个数.

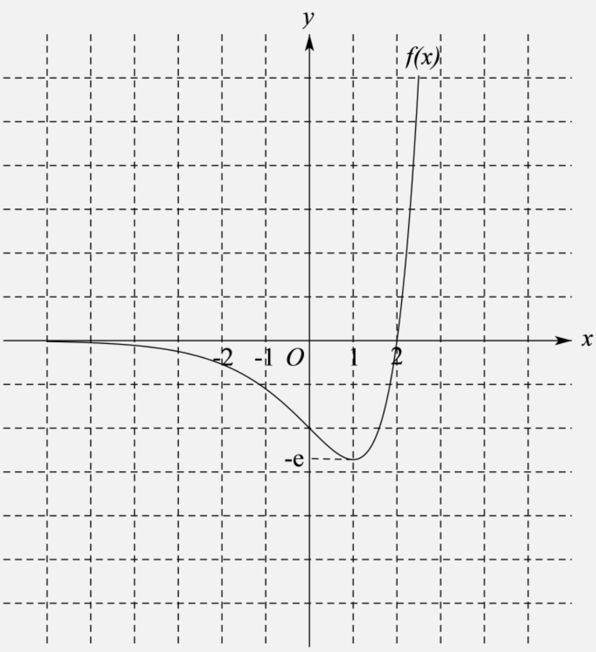
【详解】（1）$\because f\left(x\right)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\left(x-2\right)\mathrm{e}^{x}=\left(x-1\right)\mathrm{e}^{x}$，又 $\mathrm{e}^{x}>0$ 恒成立，

$\therefore$ 当 $x\in\left(-\infty,1\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$f^{¢}\left(x\right)>0$；

\ $f\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $\left(-\infty,1\right)$，单调递增区间为 $\left(1,+\infty\right)$；极小值为 $f\left(1\right)=-\mathrm{e}$，无极大值.(4 分)

（2）当 $x<2$ 时，$x-2<0$，$\mathrm{e}^{x}>0$，$\therefore f\left(x\right)<0$ 恒成立，

$f\left(x\right)$ 图象如下：



(8 分)

（3）$g\left(x\right)$的零点个数等价于$f\left(x\right)$与$y=a$的交点个数；

结合（2）中图象可知：

当$a\geq 0$时，$f\left(x\right)$与$y=a$有且仅有一个交点；

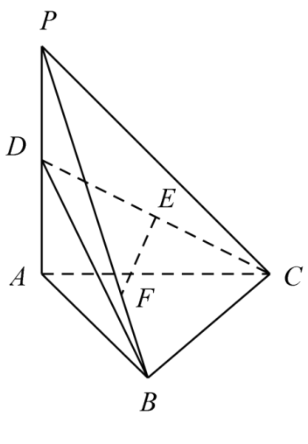
当$-\mathrm{e}<a<0$时，$f\left(x\right)$与$y=a$有两个不同交点；

当$a=-e$时，$f\left(x\right)$与$y=a$有且仅有一个交点；

当$a<-\mathrm{e}$时，$f\left(x\right)$与$y=a$无交点；

综上所述：当$a\in\left[0,+\infty\right)\cup\left\{-\mathrm{e}\right\}$时，$g\left(x\right)$有唯一零点；当$a\in\left(-\mathrm{e},0\right)$时，$g\left(x\right)$有两个不同零点；当$a\in\left(-\infty,-\mathrm{e}\right)$时，$g\left(x\right)$无零点.(12 分)

19.如图，三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$\angle ABC=90^\circ$，$PA=AC=2$，D是PA的中点，E是CD的中点，点F在PB上，$\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FB}$.



（1）证明：$EF//$平面ABC；

（2）若$\angle BAC=60^\circ$，求二面角$B-CD-A$的余弦值.

【答案】（I）证明过程见解析；（II）$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

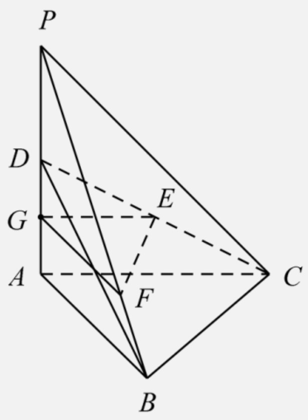
【详解】试题分析：（I）取AD的中点G，利用中位线的性质，可证明平面GEF//平面ABC，进而得到EF//平面ABC；（II）由题意，建立空间直角坐标系$o-xyz$，分别求出平面BCD和平面ACD的法向量，求出法向量之间的夹角即可求出二面角$B-CD-A$的余弦值.

试题解析：（I）证明：如图，取 AD 中点 G，连接 GE，GF，

则 GE//AC，GF//AB，

因为 GE∩GF=G，AC∩AB=A，所以平面 GEF//平面 ABC，

所以 EF//平面 ABC．（5 分）



（II）作 BO⊥AC 于点 O，过点 O 作 OH//PA，

以 O 为坐标原点，OB，OC，OH 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图 6 所示的空间直角坐标系，

则 $C\left(0,\dfrac{3}{2},0\right),B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,0\right),D\left(0,-\dfrac{1}{2},1\right)$,

$\therefore \overrightarrow{CD}=(0,-2,1),\overrightarrow{CB}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},0\right)$,

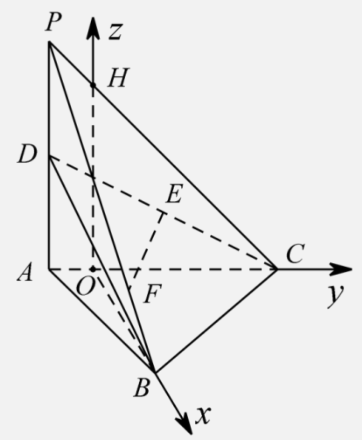
则平面 CDA 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$.

设平面 CDB 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$,

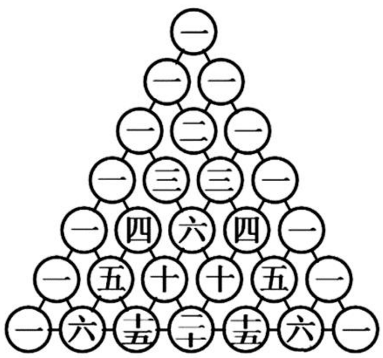
则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2y+z=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{3}{2}y=0,\end{cases}$

可取 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,2)$，所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,

所以二面角 $B-CD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．（12 分）



20．我国南宋时期的数学家杨辉，在他 1261 年所著的《详解九章算法》一书中，用如图的三角形解释二项和的乘方规律．此图称为“杨辉三角“，也称为“贾宪三角“．在此图中，从第三行开始，首尾两数为1，其他各数均为它肩上两数之和．



(1)把“杨辉三角“中第三斜列各数取出按原来的顺序排列得一数列：1，3，6，10，15，…，写出 a_n 与 $a_{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2\right)$ 的递推关系，并由此求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$，$n\in\mathrm{N}^*$，证明：$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<2$．

【详解】（1）解：由“杨辉三角“的定义可知：$a_1=1$，

$n\geq 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=n$ 所以有

$a_n=\left(a_n-a_{n-1}\right)+\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)+\cdots+\left(a_2-a_1\right)+a_1=n+(n-1)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

故 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,该式对 a_1=1 也成立.

所以 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$（$n\in\mathbf{N}^*$）(6 分)

（2）解：由题得 $b_n=\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$，$n\in\mathrm{N}^*$，所以 $b_n=n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，

设 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$，

所以$T_n=1\times(\frac{1}{2})+2\times(\frac{1}{2})^2+\cdots+n\times(\frac{1}{2})^n$，（1）

所以$\frac{1}{2}T_n=1\times(\frac{1}{2})^2+2\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+n\times(\frac{1}{2})^{n+1}$，（2）

（1）－（2）得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^n-n(\frac{1}{2})^{n+1}$，

所以$\frac{1}{2}T_n=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-n(\frac{1}{2})^{n+1}$，

所以$\frac{1}{2}T_n=1-(\frac{1}{2})^n-n(\frac{1}{2})^{n+1}=1-(\frac{1}{2})^n(1+\frac{1}{2}n)$

所以$T_n=2-(n+2)(\frac{1}{2})^n$

所以$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2-\frac{n+2}{2^n}$

故$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<2$.(12 分)

21．已知函数$f\left(x\right)=x-\ln x-2$.

(1)求曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程；

(2)若对任意的$x\in\left(1,+\infty\right)$，都有$x\ln x+x>k\left(x-1\right)$成立，求整数$k$的最大值.

【详解】（1）函数$f(x)=x-\ln x-2$，求导得$f'(x)=1-\frac{1}{x}$，则$f'(1)=0$，而$f(1)=-1$，所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程是$y=-1$.(4 分)

（2）函数$f(x)=x-\ln x-2$的定义域是$(0,+\infty)$，$f'(x)=1-\frac{1}{x}$，

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，$\forall x\in(1,+\infty)$，$x\ln x+x>k(x-1)\Leftrightarrow k<\frac{x\ln x+x}{x-1}$，

令$g(x)=\frac{x\ln x+x}{x-1},x>1$，求导得$g'\left(x\right)=\frac{\left(2+\ln x\right)\left(x-1\right)-\left(x\ln x+x\right)}{\left(x-1\right)^2}=\frac{x-\ln x-2}{\left(x-1\right)^2}$，

由$f(x)=x-\ln x-2$在$(1,+\infty)$上单调递增知，$f(3)=1-\ln 3<0$，$f\left(4\right)=2\left(1-\ln 2\right)>0$，

因此存在唯一$x_0\in(3,4)$，使得$f(x_0)=0$，即$x_0-\ln x_0-2=0\Leftrightarrow\ln x_0=x_0-2$，

当$x\in(1,x_0)$时，$f(x)<0$，即$g'(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$f(x)>0$，即$g'(x)>0$，

因此函数$g(x)$在$(1,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

于是$g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-1}=\frac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0$，则$k<x_0\in(3,4)$，

所以整数k的最大值是3.(12分)

22. 已知F_1,F_2是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的左右焦点，离心率为2，直线$x=my+2$过右焦点$F_2$.

(1)求双曲线C的方程；

(2)过F_1的直线交双曲线C于A，B两点，$M(-3,0)$，AM交曲线C于A_1，BM交曲线C于B_1，当直线A_1B_1，AB不与坐标轴平行时，记直线A_1B_1，AB的斜率分别为k_1，k，证明：$\frac{k_1}{k}$为定值.

【详解】（1）直线$x=my+2$ 与x轴的交点为：$(2,0)$，

$\therefore c=2$，又 $e=\frac{c}{a}=2, \therefore a=1$，$b=\sqrt{3}$，

双曲线C的标准方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$；(4分)

（2）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),A_1(x_3,y_3),B_1(x_4,y_4)$ ，则有$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},k_1=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$ ，

则直线AB的方程为$y=k(x+2)$，

联立方程 $\begin{cases} y=k(x+2) \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

解得： $(3-k^2)x^3-4k^2x-4k^2-3=0$，则$x_1+x_2=\frac{4k^2}{3-k^2}$，

$x_1x_2=\frac{-4k^2-3}{3-k^2}=-1-\frac{5}{4}\times\frac{4k^2}{3-k^2}=-1-\frac{5}{4}(x_1+x_2)$，

故，$x_2=\frac{-4-5x_1}{4x_1+5}$；

同理可得，$x_4=\frac{-3-5x_2}{3x_2+5}$，

$x_3=\frac{-3-5x_1}{3x_1+5}$①.

由M，A，A_1三点共线得，$\frac{y_3}{x_3+3}=\frac{y_1}{x_1+3}$，即$y_3=\frac{y_1(x_3+3)}{x_1+3}$②，

同理$y_4=\frac{y_2(x_4+3)}{x_2+3}$，

将①代入③有$y_3=\frac{4y_1}{3x_1+5}$，同理$y_4=\frac{4y_2}{3x_2+5}$

所以

$$\frac{k_1}{k}=\frac{\frac{4y_2}{3x_2+5}-\frac{4y_1}{3x_1+5}}{k(\frac{-3-5x_2}{3x_2+5}-\frac{-3-5x_1}{3x_1+5})}=\frac{4k[(x_2+2)(3x_1+5)-(x_1+2)(3x_2+5)]}{k[(3x_2+5)(5x_1+3)-(3x_1+5)(5x_2+3)]}=\frac{4(x_2-x_1)}{16(x_2-x_1)}=\frac{1}{4}$$，

即 $\dfrac{k_1}{k}=\dfrac{1}{4}$， $\dfrac{k_1}{k}$为定值.(12 分)