2024届特色高二月考二数学答案

1．D　2．C　3．D　4．D　5．C　6．A　7．B　8．C　9．BD　10．BCD　11．CD　12．ABC

13．$0.68/\frac{17}{25}$　14．$\frac{49}{60}$　15．8　16．$(0,\frac{1}{4})$

解析

1．D

【分析】利用复数乘方的性质即可求得该式的值.

【详解】$i^2+i^3+i^4=-1-i+1=-i$

2．A

【分析】代入特殊值$x=2$和$x=\frac{1}{2}$后排除选项，得到正确答案.

【详解】当$x=2$时，$f(2)=-\frac{2}{3}<0$，排除B,D，当$x=\frac{1}{2}$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}>0$，排除C,只有A符合条件，

【点睛】本题考查了由解析式判断函数图象，根据图象需分析函数的定义域和奇偶性，特殊值的正负，以及是否过定点等函数的性质，从而排除选项，本题意在考查分析和解决问题的能力.

3．D

【分析】根据平均数，众数和中位数的定义求出答案，判断ABC选项，利用方差的概念得到方差小于$\frac{1.8^2\times10}{10}=3.24$，从而选出正确答案.

【详解】经计算，这10位同学一周课外体育运动总时长的平均数为

$$\frac{6.3+7.4+7.6+8.0+8.1+8.3+8.3+8.5+8.7+8.8}{10}=8,$$

8.3出现了两次，其他数均出现了一次，故众数为8.3，

从小到大排列，选择第5和第6个数的平均数作为中位数，故中位数为$\frac{8.1+8.3}{2}=8.2$，

由于平均数为8，而最小数为6.3，与平均数相差为1.7，最大数为8.8，与平均数相差为1.8，故方差小于$\frac{1.8^2\times10}{10}=3.24$，

故最大值为8.3，为众数.

4．D

【分析】首先利用$2^n=64$求出n，然后再利用二项式展开式的通项即可求解.

【详解】根据题意可得$2^n=64$，解得$n=6$，　则$(x-\frac{1}{x})^6$展开式的通项为$C_6^r x^{6-r}(-\frac{1}{x})^r=(-1)^r C_6^r x^{6-2r}$，

令$6-2r=0$，得$r=3$，

所以常数项为：$(-1)^3C_6^3x^{6-3}\left(\frac{1}{x}\right)^3=-C_6^3=-\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=-20$　.

5．C

【分析】先利用圆锥侧面积公式与表面积公式求得其表面积，再利用球的表面积公式得到关于R的方程，解之即可求得球的体积.

【详解】依题意，设圆锥的底面半径为r，母线$l=2$，

则圆锥的侧面积为$\pi rl=2\pi$，故$r=1$，

所以圆锥的底面积为$\pi r^2=\pi$，则圆锥的表面积为$2\pi+\pi=3\pi$，

设球的半径为R，则$4\pi R^2=3\pi$，得$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以球的体积$V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

6．A

【分析】根据正态分布的对称性，即可求得μ的值和$P(X\geq 32)$，从而求出10000片中每天需要进行复检的产品.

【详解】因为$P(X\geq 25)+P(X\geq 31)=1$，所以$P(X\geq 31)=1-P(X\geq 25)=P(X<25)$，

即$X=25$与$X=31$关于$X=\mu$对称，则$\mu=\frac{25+31}{2}=28$，

因为$\sigma^2=4$，所以$\sigma=2$，又因为$\mu+2\sigma=32$，

$P(X\geq 32)=P(X\geq \mu+2\sigma)=\frac{1-P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)}{2}=\frac{1-0.9545}{2}$

$=\frac{1-0.9545}{2}=0.02275$，所以$10000\times 0.02275=227.5\approx 228$件，

所以每天需要进行复检的产品大约有228件，

7．B

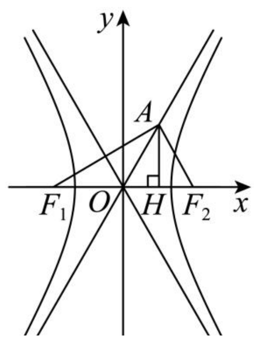
【分析】先求出双曲线的渐近线方程，由$\triangle F_1AF_2$的面积求出c，进一步计算实轴长即可.

【详解】双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.如图，由$F_1A\perp F_2A$，知$|OA|=c$，

过点A作$AH\perp F_1F_2$于点H，则$\angle AOH=\frac{\pi}{3}$，$|AH|=\frac{\sqrt{3}}{2}c$，

因为$S_{\triangle F_1AF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\times|AH|=c\times|AH|=\frac{\sqrt{3}}{2}c^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$c=1$.

由$a^2+3a^2=c^2$，得$a=\frac{1}{2}$，故双曲线C的实轴长为1.



8．C

【分析】根据题意，由极值点的定义得到当$x\geq 0$时，有一个极值点，然后再由函数的奇偶性即可得到结果.

【详解】因为当$x\geq 0$时，$f(x)=(x^2-2x)e^x$，则$f'(x)=e^x(x^2-2)$，

令$f'(x)=0$，则$e^x(x^2-2)=0$，解得$x=\sqrt{2}$，

当$x\in\left(0,\sqrt{2}\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，则函数$f\left(x\right)$单调递减，

当$x\in\left(\sqrt{2},+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，则函数$f\left(x\right)$单调递增，

所以$x=\sqrt{2}$是函数的一个极小值点，

又因为$f\left(x\right)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，

所以$x=-\sqrt{2}$是函数的另外一个极小值点，

即函数$f\left(x\right)$的极值点的个数为2.

9．BD

【分析】根据二项分布的均值公式可判断A；根据二项分布的方差公式可判断B；由$P(X\geq 1)=1-P(X=0)$，结合二项分布的概率计算公式可判断C；作商比较，结合二项分布的概率计算公式可判断D.

【详解】对于A，$E(X)=10\times 0.2=2$，故A错误；

对于B，$D(X)=10\times 0.2\times 0.8=1.6$，故B正确；

对于C，$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.8^{10}$，故C错误；

对于D，$\because \dfrac{P(X=2)}{P(X=3)}=\dfrac{C_{10}^{2}\times(0.2)^{2}\times(0.8)^{8}}{C_{10}^{3}\times(0.2)^{3}\times(0.8)^{7}}=\dfrac{45\times 0.8}{120\times 0.2}=\dfrac{3}{2}>1$，

$\therefore P(X=2)>P(X=3)$，故D正确.

10．BCD

【分析】计算数列前三项可判断A；利用$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，构造等比数列，可判断B，C；结合C的结果以及等比数列前n项和公式可判断D.

【详解】由题意数列$\left\{a_n\right\}$的首项$a_1=1$，且满足$a_{n+1}=2a_n+1$，则$a_2=3,a_3=7$，

则$\dfrac{a_2}{a_1}\neq\dfrac{a_3}{a_2}$，故数列$\left\{a_n\right\}$不是等比数列，A错误；

由$a_{n+1}=2a_n+1$得$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，$a_n+1\neq 0$，否则与$a_1=1$矛盾，

则$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，则数列$\left\{a_n+1\right\}$是等比数列，B正确；

由B分析知数列$\left\{a_n+1\right\}$是等比数列，首项为$a_1+1=2$，公比为$q=2$，

则$a_n+1=2\times 2^{n-1},\therefore a_n=2^n-1$，C正确；

数列$\left\{a_n\right\}$的前6项的和为$(2^1-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^6-1)=\dfrac{2(1-2^6)}{1-2}6=120$，D正确

11．CD

【分析】设事件A为“第1次抽到函数题”，设事件B为“第2次抽到概率题”，由条件求出样本空间的样本点的个数，即可判断A；由古典概型概率公式即可判断B；求出事件AB所包含的样本点数，求出$P(AB)$，即可判断C；由条件概率公式求出$P(B|A)$，即可判断D.

【详解】设事件A为“第1次抽到函数题”，设事件B为“第2次抽到概率题”，

从5道题中每次不放回地随机抽取2道题，

试验的样本Ω包含20个等可能的样本点，即$n(\Omega)=20$，

对于A：“从5道试题中不放回的随机抽取2道”包含的样本点个数为$A_5^2=20$个，故A错误；

对于B：第1次抽到函数题的概率$P=\frac{3}{5}$，故B错误；

对于C：因为$n(AB)=A_3^1\times A_2^1=6$，

所以$P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$，故C正确；

对于D：在缩小的样本空间A上求$P(B|A)$，

已知第一次抽到函数题，还剩下4道题，其中2道函数题，2道概率题，

所以在事件A发生的条件下事件B发生的概率$P(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，故D正确；

12．ABC

【分析】化简函数$f\left(x\right)$的解析式，作出函数$f\left(x\right)$的图象，逐项判断可得出合适的选项.

【详解】因为$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

当$2k\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$时，即当$2k\pi+\frac{\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$时，

$\sin x-\cos x\ge 0$，即$\sin x\ge\cos x$，

此时，$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)-\frac{1}{2}\left(\sin x-\cos x\right)=\cos x$；

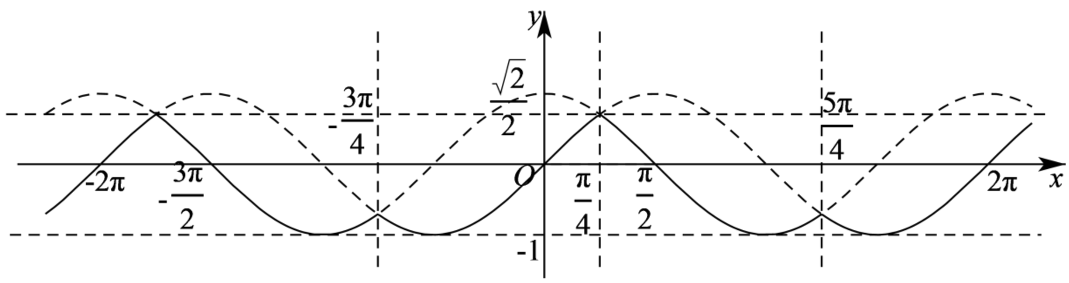
当$2k\pi-\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$时，即当$2k\pi-\frac{3\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{4}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$时，

$\sin x-\cos x\le 0$，即$\sin x\le\cos x$，

此时，$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)-\frac{1}{2}\left(\cos x-\sin x\right)=\sin x$.

所以，$f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x, 2k\pi-\frac{3\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{4}\\ \cos x, 2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{4}\end{cases}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$.

作出函数$f\left(x\right)$的图象如下图中实线所示：



对于 A 选项，由图可知，函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{3\pi}{4}$ 、 $x=\frac{\pi}{4}$ 、 $x=\frac{5\pi}{4}$ 对称，

对任意的 $k\in\mathbf{Z}$，

$$f\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)\right]-\frac{1}{2}\left|\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos x+\sin x\right)-\frac{1}{2}\left|\cos x-\sin x\right|=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)-\frac{1}{2}\left|\sin x-\cos x\right|=f\left(x\right),$$

所以，函数 $f\left(x\right)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，A 对；

对于 B 选项，对任意的 $x\in\mathbf{R}$， $f\left(2\pi+x\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\pi+x\right)+\cos\left(2\pi+x\right)\right]-\frac{1}{2}\left|\sin\left(2\pi+x\right)+\cos\left(2\pi+x\right)\right|$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)-\frac{1}{2}\left|\sin x-\cos x\right|=f\left(x\right),$$

结合图象可知，函数 $f\left(x\right)$ 为周期函数，且最小正周期为 2π，B 对；

对于 C 选项，由 A 选项可知，函数 $f\left(x\right)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，且该函数的最小正周期为 2π，

要求函数 $f\left(x\right)$ 的最大值和最小值，只需求出函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值，

因为函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减，在 $\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增，

所以，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 时， $f\left(x\right)_{\min}=f\left(\pi\right)=\cos\pi=-1$，

因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\frac{5\pi}{4}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以， $f\left(x\right)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因此， $f\left(x\right)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，最小值为 -1，C 对；

对于 D 选项，由 C 选项可知，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减，在 $\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增，D 错.

13． $0.68/\frac{17}{25}$

【分析】根据全概率公式即可求解.

【详解】记任取一个产品为优质品为事件 B，

记产品由甲生产线生产为事件 A_1，产品由乙生产线生产为事件 A_2，

根据题意得 $P\left(A_1\right)=0.6, P\left(A_2\right)=0,4, P\left(B \mid A_1\right)=0.7, P\left(B \mid A_2\right)=0.65$ ，

因为 $\Omega=A_1 \cup A_2$，且 A_1, A_2 互斥.

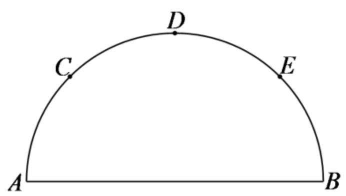
所以根据全概率公式可得，

$P(B)=P\left(A_1\right) P\left(B \mid A_1\right)+P\left(A_2\right) P\left(B \mid A_2\right)=0.6 \times 0.7+0.4 \times 0.65=0.68$.

14． $\frac{49}{60}$

【分析】确定三角形的个数，以及直角三角形、钝角三角形的个数，利用组合计数原理以及古典概型的概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】如下图所示，设 AB 为半圆弧的直径，C 、D 、E 为半圆弧另外的三个四等分点，



从A 、B 、C 、D 、E 这5个点任取3个点构成三角形，一共能组成三角形的个数为 $\mathrm{C}_5^3=10$.

其中直角三角形有：$\triangle ABC$ 、$\triangle ABD$ 、$\triangle ABE$ ，共3个，钝角三角形的个数为 $10-3=7$，

由题意可知 $X \in\{0,1,2,3\}$ ，$P(X=2)=\frac{\mathrm{C}_7^2 \mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{63}{120}$，$P(X=3)=\frac{\mathrm{C}_7^3}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{35}{120}$，

因此，所求概率为 $P=\frac{63+35}{120}=\frac{49}{60}$.

15． 8

【分析】根据题意得到 AB 的直线方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3} y+\frac{p}{2}$，联立方程组得到 $y_1+y_2=\frac{2 \sqrt{3}}{3} p$，求得 AB 的中点的纵坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{3} p$，求得 $p=3$，结合抛物线的定义和 $|AB|=x_1+x_2+p$，即可求解.

【详解】由抛物线 $C: y^2=2 p x(p>0)$，可得其焦点坐标为 $F(\frac{p}{2}, 0)$，

过焦点 F 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3} y+\frac{p}{2}$，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，联立方程组 $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{3}}{3} y+\frac{p}{2} \\ y^2=2 p x\end{array}\right.$，整理得 $3 y^2-2 \sqrt{3} p y-3 p^2=0$，

可得 $y_1+y_2=\frac{2 \sqrt{3}}{3} p$，则 AB 的中点的纵坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{3} p$，

因为线段 AB 中点的纵坐标为 $\sqrt{3}$，可得 $\frac{\sqrt{3}}{3}p=\sqrt{3}$，解得 $p=3$，

又由抛物线的定义可得 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{\sqrt{3}}{3}(y_1+y_2)+2p=2+6=8$．

16．$(0,\frac{1}{4})$

【分析】判断函数的单调性，根据“优美函数”的定义可列出方程组，结合一元二次方程的根的范围列出不等式，即可求得答案.

【详解】若 $c>1$，则函数 $y=c^x-t$ 为 R 上增函数，$y=\log_c x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，

所以函数 $f\left(x\right)=\log_c\left(c^x-t\right)$ 为其定义域上的增函数，

若 $0<c<1$，则函数 $y=c^x-t$ 为 R 上减函数，$y=\log_c x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的减函数，

所以函数 $f\left(x\right)=\log_c\left(c^x-t\right)$ 为其定义域上的增函数，

综上，函数 $f\left(x\right)=\log_c\left(c^x-t\right)$ 为其定义域上的增函数，

若函数 $f\left(x\right)=\log_c\left(c^x-t\right)(c>0,c\neq 1)$ 是“优美函数”，则 $\begin{cases}f\left(\frac{a}{2}\right)=a\\f\left(\frac{b}{2}\right)=b\end{cases}$，

即 $\begin{cases}c^a-c^{\frac{a}{2}}+t=0\\c^b-c^{\frac{b}{2}}+t=0\end{cases}$，即 $c^{\frac{a}{2}},c^{\frac{b}{2}}$ 是方程 $x^2-x+t=0$ 的两个不同的正根，

则 $\begin{cases}\Delta=1-4t>0\\t>0\end{cases}$，解得 $0<t<\frac{1}{4}$，即 t 的取值范围是 $(0,\frac{1}{4})$，

【点睛】关键点点睛：解答本题要正确理解“优美函数”的定义，由此可列出相应的方程，因此解答的关键在于判断函数的单调性，进而将问题转化为一元二次方程的根的范围问题.

17．(1) $\frac{\pi}{3}$；(2) $2\sqrt{3}+2$

【分析】（1）先将条件整理，然后利用正弦定理角化边，最后利用余弦定理求解；

（2）先根据 $\triangle ABC$ 的面积得到 bc 的值，再结合（1）中得到的 b,c 关系可得 $b+c$ 的值，则周长可求.

【详解】（1）$\because(\sin B+\sin C)^2=\sin^2 A+3\sin B\sin C$，

$\therefore\sin^2 B+2\sin B\sin C+\sin^2 C=\sin^2 A+3\sin B\sin C$，$\therefore\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，

由正弦定理角化边得 $b^2+c^2-a^2=bc$，$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，又 $A\in\left(0,\pi\right)$，

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$；

（2）由已知得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore bc=\frac{8}{3}$，又$b^2+c^2-4=bc$，$\therefore b^2+c^2=bc+4=\frac{20}{3}$，

$\therefore\left(b+c\right)^2=b^2+c^2+2bc=\frac{20}{3}+\frac{16}{3}=\frac{36}{3}=12$，

$\therefore b+c=2\sqrt{3}$，$\therefore\triangle ABC$的周长为$2\sqrt{3}+2$.

18．(1) $S_n=n^2$；(2) $-\frac{2n}{2n+1}$

【分析】（1）选①利用等差数列的定义，选②利用累乘法即可求解；

（2）利用裂项相消法即可求解.

【详解】（1）选①：因为$S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\left(n\geq 2\right)$，

所以$\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\right)\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\right)=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，解得$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1\left(n\geq 2\right)$，

则$\sqrt{S_n}$是首项为1，公差为1的等差数列，从而$\sqrt{S_n}=n$，故$S_n=n^2$，

因为$S_1=a_1=1$满足上式，所以$S_n=n^2$.

选②，因为$\left(n-1\right)\sqrt{S_n}=n\sqrt{S_{n-1}}\left(n\geq 2\right)$，所以$\sqrt{S_n}=\frac{n}{n-1}\sqrt{S_{n-1}}\left(n\geq 2\right)$，

所以$\sqrt{S_n}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}\sqrt{S_1}=n\left(n\geq 2\right)$，则$S_n=n^2\left(n\geq 2\right)$，

因为$S_1=a_1=1$满足上式，所以$S_n=n^2$.

（2）由（1）可得$b_n=\left(-1\right)^n\cdot\frac{2n+1}{n^2+n}=\left(-1\right)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$，

则$T_{2n}=-\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=-1+\frac{1}{2n+1}=-\frac{2n}{2n+1}$.

19．(1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$；(2) $\frac{11}{13}$.

【分析】（1）根据给定条件，结合棱台的结构特征证明$AC\perp$平面BB_1D_1D，四边形BB_1D_1D为直角梯形，再求出体积作答.

（2）由（1）的信息，建立空间直角坐标系，利用空间向量求解作答.

【详解】（1）因为$ABCD$是菱形，则$AC\perp BD$，又$DD_1\perp$平面$ABCD$，$BD,AC\subset$平面$ABCD$，

则有$BD\perp DD_1,AC\perp DD_1$，而$BD\cap DD_1=D,BD,DD_1\subset$平面$BB_1D_1D$，于是$AC\perp$平面$BB_1D_1D$，

在四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，四边形BB_1D_1D为直角梯形，在菱形$ABCD$中，$\angle ABC=120^\circ$，

有$\triangle BCD$是正三角形，$BD=BC=2,B_1D_1=B_1C_1=1$，梯形BB_1D_1D的面积$S=\frac{1}{2}(1+2)\times 3=\frac{9}{2}$，

显然四棱锥$A-BB_1D_1D$的高h，即为正$\triangle ABD$边BD上的高$\sqrt{3}$，

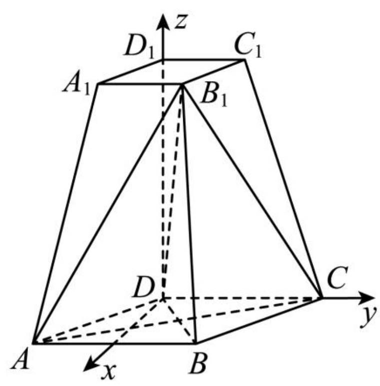
所以四棱锥 $A-BB_1D_1D$ 的体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

（2）在平面 $ABCD$ 内过点 D 作 $Dx\perp CD$，由（1）知 Dx,DC,DD_1 两两垂直，

以点 D 为原点，射线 Dx,DC,DD_1 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，如图，

则 $D(0,0,0),A(\sqrt{3},-1,0),B_1(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},3),C(0,2,0),B(\sqrt{3},1,0)$ ，

$\overrightarrow{DB_1}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},3),\overrightarrow{DA}=(\sqrt{3},-1,0),\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{BB_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},3)$ ，



设平面 AB_1D 的法向量 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DA}=\sqrt{3}x_1-y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DB_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+3z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=\sqrt{3}$，得 $\vec{m}=(\sqrt{3},3,-1)$，

设平面 BB_1C 的法向量 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-\sqrt{3}x_2+y_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2-\frac{1}{2}y_2+3z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=\sqrt{3}$，得 $\vec{n}=(\sqrt{3},3,1)$，

设平面 AB_1D 与平面 BB_1C 所成角为 θ，显然 θ 为锐角，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{3+9-1}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}=\frac{11}{13}$，

所以平面 AB_1D 与平面 BB_1C 所成角的余弦值为 $\frac{11}{13}$.

20．(1)分布列见解析；(2)① $p_1=0$， $p_2=\frac{1}{2}$， $p_3=\frac{1}{4}$；② $p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2},n=1,2,3$； $\frac{1}{3}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right]$

【分析】（1）由离散型随机变量的分布列可解；

（2）记 A_n 表示事件“经过 n 次传球后，球在甲手中”，由全概率公式可求

$p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}$,再由数列知识，由递推公式求得通项公式.

【详解】（1） X 可能取值为 $1,2,3$，

$p(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$； $p(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$； $p(X=3)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

（2）若刚好抽到甲乙丙三个人相互做传球训练，且n次传球后球在甲手中的概率为$p_n, n=1,2,3,\cdots$，

则有$p_1=0,\ p_2=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2},\ p_3=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$，记$A_n$表示事件“经过$n$次传球后，球在甲手中”，

$A_{n+1}=\overline{A_n}\cdot A_{n+1}+A_n\cdot A_{n+1}$所以$p_{n+1}=P\left(\overline{A_n}\cdot A_{n+1}+A_n\cdot A_{n+1}\right)=P\left(\overline{A_n}\cdot A_{n+1}\right)+P\left(A_n\cdot A_{n+1}\right)$

$=P\left(\overline{A_n}\right)\cdot P\left(A_{n+1}|\overline{A_n}\right)+P\left(A_n\right)\cdot P\left(A_{n+1}|A_n\right)=\left(1-p_n\right)\cdot\frac{1}{2}+p_n\cdot 0=\frac{1}{2}\left(1-p_n\right)$

即$p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}, n=1,2,3$，所以$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$，且$p_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

所以数列$\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$表示以$-\frac{1}{3}$为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，

所以$p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$所以$p_n=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

即n次传球后球在甲手中的概率是$\frac{1}{3}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right]$.

21．(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；(2)直线$l$过定点$\left(-14,0\right)$.

【分析】(1）利用待定系数法求出椭圆C的方程；(2）不妨设直线$l: y=kx+m$.设$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$.利用“设而不求法”表示出$k_{AM}\cdot k_{AN}=1$,得到$m=14k$.即可得到直线$l: y=k\left(x+14\right)$过定点$\left(-14,0\right)$.

【详解】(1）由题意可得：$\begin{cases}a=2\\ e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ b^2=a^2-c^2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$，所以椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）不妨设直线$l: y=kx+m$.设$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$.

联立得：$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，消去$y$得：$\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

所以$\Delta=\left(8km\right)^2-4\left(3+4k^2\right)\left(4m^2-12\right)=48\left(4k^2-m^2+3\right)>0$.所以$x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}, x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$.

因为直线AM，AN的斜率之积等于1，所以$k_{AM}\cdot k_{AN}=1$,即$\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=1$，

所以$\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)=\left(x_1+2\right)\left(x_2+2\right)$，整理得：$\left(k^2-1\right)x_1x_2+\left(km-2\right)\left(x_1+x_2\right)+m^2-4=0$.

所以$\left(k^2-1\right)\times\frac{4m^2-12}{3+4k^2}+\left(km-2\right)\left(-\frac{8km}{3+4k^2}\right)+m^2-4=0$，整理得：$m^2-16km+28k^2=0$，

解得：$m=2k$或$m=14k$.

当$m=2k$时，直线$l: y=k\left(x+2\right)$过定点$A\left(-2,0\right)$，不合题意，舍去；

当$m=14k$时，代入$\Delta=48\left(4k^2-\left(14k\right)^2+3\right)>0$，解得：$-\frac{1}{8}<k<0$或$0<k<\frac{1}{8}$（因为$k=0$时直线$l: y=k\left(x+2\right)$与椭圆交于长轴顶点，不合题意），直线$l: y=k\left(x+14\right)$过定点$\left(-14,0\right)$.符合题意.

故直线l过定点$\left(-14,0\right)$，使得直线AM，AN的斜率之积等于1.

22．(1) $f(x)_{极小值}=-4$；(2) $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

【分析】（1）求出函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，利用 $f'(x)$ 研究函数单调性，从而求出极小值；

（2）构造函数 $g(x)=\ln x-m(x-1)e^x, x\in[1,+\infty)$，即只需寻找函数 $g(x)$ 恒小于零时实数 m 的取值范围.

【详解】（1）当 $m=4$ 时，$f(x)=4(x-1)e^x-x^2$，

则 $f'(x)=4e^x+4(x-1)e^x-2x=2x(2e^x-1)$.

令 $f'(x)>0$，得 $x<-\ln2$ 或 $x>0$，令 $f'(x)<0$，得 $-\ln2<x<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln2)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\ln2,0)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{极小值}=f(0)=-4$.

（2）由 $f(x)\geq \ln x-x^2$，可得 $\ln x\leq m(x-1)e^x$，

故 $\ln x\leq m(x-1)e^x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x)=\ln x-m(x-1)e^x, x\in[1,+\infty)$，

若 $m\leq 0$，则 $g(x)\geq 0$ 恒成立，不合题意.

若 $m>0$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-mxe^x$.

令 $h(x)=\frac{1}{x}-mxe^x, x\in[1,+\infty)$，

则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-m(x+1)e^x<0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

当 $m\geq\frac{1}{e}$ 时，$h(x)\leq h(1)=1-me\leq 0$，即 $g'(x)\leq 0$，

所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

故 $g(x)\leq g(1)=0$，

即 $\ln x\leq m(x-1)e^x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，满足题意.

当 $0<m<\frac{1}{e}$ 时，$g'(1)=1-me>0, g'\left(\frac{1}{m}\right)=m-e^{\frac{1}{m}}<1-e<0$，

所以存在 $x_0>1$，使得 $g'(x_0)=0$，

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以存在 $x'\in(1,x_0)$，使得 $g(x')>g(1)=0$，不合题意.

综上，实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.