

## 理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	B	C	C	C	D	D	A	D	B	D

【解析】

1.  $A = \{x | 1 < x < 3\}$ ,  $B = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$ ,  $\therefore A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$ , 故选 A.

2. 因为点  $Z(3, -4)$  关于原点的对称点为  $Z'(-3, 4)$ , 所以向量  $\overrightarrow{OZ'} = (-3, 4)$ , 复数  $z = -3 + 4i$ ,  
则  $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ , 故选 A.

3. 对于 C,  $11011_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 27$ ; 对于 A,  $221_{(3)} = 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 25$ ; 对于 B,  $130_{(4)} = 1 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 0 \times 4^0 = 28$ ,  $\therefore$  四个数中最大的是 28, 即  $130_{(4)}$ ,  
故选 B.

4. 由题意得,  $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$   
 $= \sqrt{k+1} - 1 = 44$ , 解得  $k = 2024$ , 即当  $k = 2024$  时, 满足判断框内的条件,  $k = 2025$  时,  
不满足判断框内的条件, 结束运行, 所以判断框内应填入的条件是 “ $k < 2025$ ?”, 故  
选 C.

5. 设圆的半径为 1, 当圆内接正三百六十边形时, 每边端点与圆心连线构成的小三角形均为  
腰为 1、顶角为  $1^\circ$  的等腰三角形, 则圆内接正多边形的面积为  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 1^\circ \times 360 =$   
 $180 \sin 1^\circ$ , 圆的面积为  $\pi$ , 用圆内接正多边形的面积来近似代替圆的面积, 既有  
 $180 \sin 1^\circ = \pi$ , 故选 C.

6. 设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则有  $\begin{cases} x_1^2 = 8y_1, \\ x_2^2 = 8y_2, \end{cases}$  两式相减得  $x_1^2 - x_2^2 = 8(y_1 - y_2)$ ,  $\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{8}$   
 $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ,  $\therefore k_{AB} = \frac{1}{4}$ ,  $\therefore$  直线  $l$  的方程为  $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 1)$ , 即  $x - 4y + 7 = 0$ , 故选 C.

7. 因为  $f(-x) = \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} \cdot \cos(-x) = \frac{e^x+1}{1-e^x} \cdot \cos x = -\frac{e^x+1}{e^x-1} \cdot \cos x = -f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  为奇函数, 故排除 B, C; 又当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时,  $f(x) > 0$ , 故排除 A, 故选 D.

8. 由题意知,  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Rightarrow |\vec{a}|^2 - |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ , 代入  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$  的值得  $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1 + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = \sqrt{1 + 2 + 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{5}, \text{ 所以向量 } \vec{a} \text{ 在向量 } \vec{c} \text{ 上的投}$$

$$\text{影为 } \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 故选 D.}$$

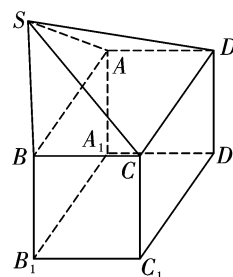


图 1

9. 如图 1, 该几何体可看成由长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  和四棱锥  $S-ABCD$

组合而成, 该几何体的表面积为四棱锥的侧面积、长方体的侧面积和

一个底面面积之和, 其中  $BB_1 = BC = 2$ ,  $AB = 4$ ,  $SA = SB = 2\sqrt{2}$ , 平

面  $SAB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BC \perp CD$ , 则可得  $BC \perp SB$ ,  $AD \perp SA$ , 故  $SC = SD = 2\sqrt{3}$ , 则

$$S_{\triangle SBC} = S_{\triangle SAD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}. \text{ 又等腰 } \triangle SCD \text{ 底边上的高为 } \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}, \text{ 故}$$

$$S_{\triangle SCD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}, \quad S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4, \text{ 则该几何体的表面积}$$

$$S = 2 \times 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4 + 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 4 \times 2 + 2 \times 4 = 36 + 8\sqrt{2}, \text{ 故选 A.}$$

10. 由函数  $f(x)$  的图象相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 得  $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi$ , 所以  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ,

$$f(x) = \sin(2x + \varphi), \text{ 又其一个对称中心为 } \left(\frac{5\pi}{12}, 0\right), \text{ 即有 } 2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 则}$$

$$\varphi = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \text{ 又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}, \quad f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \quad g(x) = \sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 函数 } y = f(x) + g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x \geq -1, \text{ 故选 D.}$$

11. 由题意可得:  $|PF_1|^2 = |F_1F_2|^2 + |PF_2|^2 - 2|F_1F_2| \cdot |PF_2| \cdot \cos \angle PF_2F_1 = 4c^2 + 4c^2 - 2 \cdot 2c \cdot 2c \cdot$

$$\cos \angle PF_2F_1 = 8c^2(1 - \cos \angle PF_2F_1), \text{ 即 } |PF_1| = 2\sqrt{2}c \cdot \sqrt{1 - \cos \angle PF_2F_1}, \quad \therefore 2a = ||PF_1| - |PF_2|| =$$

$$|2\sqrt{2}c \cdot \sqrt{1 - \cos \angle PF_2 F_1} - 2c|, \because 60^\circ < \angle PF_2 F_1 < 120^\circ, \therefore -\frac{1}{2} < \cos \angle PF_2 F_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < 1 - \cos \angle PF_2 F_1 < \frac{3}{2}, \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{1 - \cos \angle PF_2 F_1} < \frac{\sqrt{6}}{2}, \therefore 0 < 2\sqrt{2}c \cdot \sqrt{1 - \cos \angle PF_2 F_1} - 2c < (2\sqrt{3} - 2)c, \therefore 0 < 2a < (2\sqrt{3} - 2)c, \therefore \frac{c}{a} > \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, \therefore e \in \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, +\infty \right), \text{ 故选 B.}$$

12.  $f'(x) = e^{-x}(1-x) < 0$ ,  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上是单调减函数,  $\therefore f(x) \in \left[ \frac{2}{e^2}, \frac{1}{e} \right]$ ,  $g'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} > 0$ ,  $g(x)$  在区间  $[1, 2]$  上是单调增函数, 所以  $g(x) \in \left[ \frac{1}{2} + a, 2 - \ln 2 + a \right]$ .  $\exists x_1, x_2 \in [1, 2]$  使得  $f(x_1) = g(x_2)$ ,  $\therefore \{y | y = f(x)\} \cap \{y | y = g(x)\} \neq \emptyset$ , 当  $\{y | y = f(x)\} \cap \{y | y = g(x)\} = \emptyset$  时, 得  $2 - \ln 2 + a < \frac{2}{e^2}$  或  $\frac{1}{e} < \frac{1}{2} + a$ ,  $\therefore a < \frac{2}{e^2} + \ln 2 - 2$  或  $a > \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$ , 所以  $f(x) \cap g(x) \neq \emptyset$ , 得  $a \in \left[ \frac{2}{e^2} + \ln 2 - 2, \frac{1}{e} - \frac{1}{2} \right]$ , 故选 D.

## 二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{1}{5}$	68.3	①②④	502

### 【解析】

13. 作出可行域如图 2 中的阴影部分所示,  $z = x^2 + y^2$  的几何含义为原点到阴影区域内的点距离的最小值的平方, 易知原点到直线  $2x - y + 1 = 0$  的距离  $d = \frac{|2 \times 0 - 1 \times 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 即原点到阴影

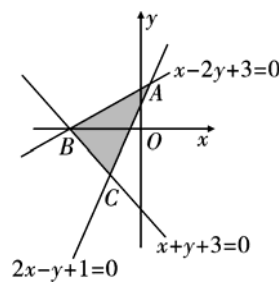


图 2

区域的最小值, 而  $d^2 = \frac{1}{5}$ , 则  $z = x^2 + y^2$  的最小值为  $\frac{1}{5}$ .

14. 如图 3, 连接  $BD$ , 在  $\triangle ABD$  中, 由余弦定理得:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \angle DAB = 10^2 + (10\sqrt{3})^2$$

$$-2 \times 10 \times 10\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100, \therefore BD = 10, \therefore \triangle ABD \text{ 为等腰三角形, } \angle BDA = 120^\circ. \therefore \angle ADC +$$

$$\angle A + \angle ABC + \angle BCD = 360^\circ, \therefore \angle BCD = 90^\circ, \therefore \angle BDC = \angle CBD = 45^\circ, \therefore \triangle BCD \text{ 为等}$$

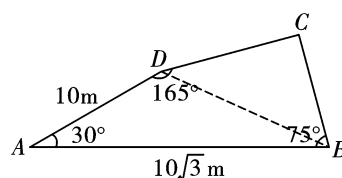


图 3

腰直角三角形. 设  $BC = DC = x$ , 则  $x^2 + x^2 = 10^2$ ,  $\therefore x = 5\sqrt{2}$ ,  $\therefore S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$   
 $= \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times (5\sqrt{2})^2 = 25\sqrt{3} + 25 \approx 68.3$ ,  $\therefore$  四边形  $ABCD$  的面积大约为  
 $68.3\text{m}^2$ .

15. ①:  $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$  或  $x = 2$ , 故 “ $x = 1$ ” 是 “ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”  
 的充分不必要条件, ①正确; ②: 易知  $x^2 + y^2 \leq 1$  表示圆  $x^2 + y^2 = 1$  上

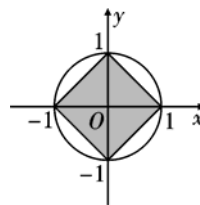


图 4

及其内部的点, 而  $|x| + |y| \leq 1$  表示如图 4 的阴影部分区域, 则概率  $P = \frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\text{圆}}} = \frac{2}{\pi}$ , ②正确;

③: 令  $2^x = t (t > 0)$ , 故③中方程等价于  $t^2 + t + 1 - m = 0$ , 而命题  $P$  是假命题, 则

$t^2 + t + 1 - m = 0 (t > 0)$  无解, 由于对称轴  $t = -\frac{1}{2} < 0$ , 只需  $1 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 1$  即可, ③不正

确; ④: 因为  $g(x) = \cos x$  为偶函数, 所以  $g(x) = \cos x = \cos |x|$ , 所以  $f(x) = \cos x + |\cos x|$ ,

且  $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + |\cos(x + 2\pi)| = f(x)$ , 所以  $f(x)$  的最小正周期为  $T = 2\pi$ . 另解: 我

们还可以作出  $f(x)$  的图象, 如图 5, 易得最小正周期  $T = 2\pi$ . 所以④正确, 故答案为①②④.

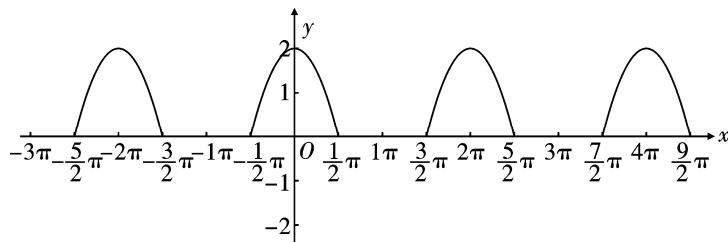


图 5

16.  $\because f(x+2) = f(x-2)$ ,  $\therefore f(x+4) = f(x)$ ,  $\therefore f(x)$  是周期为 4 的

周期函数. 令  $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x - x^3 = 0$ , 得  $\sin \frac{\pi}{2}x = x^3$ , 在同一坐标

系下画出  $y = \sin \frac{\pi}{2}x$  与  $y = x^3$  的图象. 由图 6 知, 当  $x \in [-2, 2)$  时,

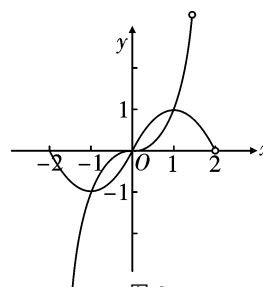


图 6

函数  $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x - x^3$  有 3 个零点. 又  $\because 669 = 4 \times 167 + 1$ , 就是说, 在区间  $[0, 669)$  上有

167 个完整的周期, 零点个数为  $167 \times 3 = 501$ , 所以函数  $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x - x^3$  在区间  $[0, 669)$  上

共有 502 个零点, 故答案为 502.

### 三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

(1) 解：由  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \cdots + \frac{1}{na_n} = \frac{2n}{n+1}$ , ①

当  $n=1$  时,  $a_1=1$ ;

当  $n \geq 2$  时,  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)a_{n-1}} = \frac{2(n-1)}{n}$ , ②

①-②, 得  $\frac{1}{na_n} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2}{n(n+1)}$ ,

$\therefore a_n = \frac{n+1}{2}$ ,

$\therefore a_n = \frac{n+1}{2}$  对  $n=1$  也适合.

综上,  $a_n = \frac{n+1}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$ . ..... (6 分)

(2) 证明:  $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} = 4 \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$ ,

$S_n = 4 \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right] = 4 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) < 2$ .

..... (12 分)

18.（本小题满分 12 分）

(1) 证明：因为四边形  $ABCD$  为菱形，所以  $AD \parallel BC$  .

因为  $AD \subset$  平面  $PAD$ ,  $BC \not\subset$  平面  $PAD$ ,

所以  $BC \parallel$  平面  $PAD$ .

因为直线  $a$  为平面  $PAD$  与平面  $PBC$  的交线,  $AD \subset$  平面  $PAD$ ,

所以  $a \parallel AD$  .

因为  $AD \subset$  平面  $ABCD$ ,  $a \not\subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $a \parallel$  平面  $ABCD$ . ..... (6 分)

(2) 解：因为  $PA = PD$  , 点  $E$  为线段  $AD$  的中点, 所以  $PE \perp AD$  .

因为  $PE \perp CD$  ,  $AD \cap CD = D$  ,  $AD, CD \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $PE \perp$  平面  $ABCD$ .

以点  $E$  为坐标原点,  $EC$ ,  $ED$ ,  $EP$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,

$z$  轴建立如图 7 所示的空间直角坐标系, 因为  $AB = 2PE = 2$ ,

所以  $P(0, 0, 1)$ ,  $D(0, 1, 0)$ ,  $C(\sqrt{3}, 0, 0)$ ,

所以  $\overrightarrow{PD} = (0, 1, -1)$ ,  $\overrightarrow{PC} = (\sqrt{3}, 0, -1)$ .

设平面  $PDC$  的一个法向量  $\vec{m} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则有 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y - z = 0, \\ \sqrt{3}x - z = 0, \end{cases}$$

取  $y = \sqrt{3}$ , 得  $\vec{m} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

取平面  $PAD$  的一个法向量为  $\vec{n} = (1, 0, 0)$ .

设二面角  $A-PD-C$  的大小为  $\theta$ ,

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{7}}{7}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

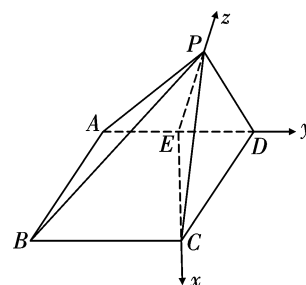


图 7

19. (本小题满分 12 分)

解: (1) 应该选择模型①.  $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

(2) 因为  $y = c \cdot d^x$ , 两边取常用对数得  $\lg y = \lg(c \cdot d^x) = \lg c + \lg d \cdot x$ ,

设  $\lg y = z$ , 所以  $z = \lg c + \lg d \cdot x$ .

$$\text{因为 } \sum_{i=1}^7 x_i z_i = 50.96, \bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4, \sum_{i=1}^7 x_i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 7^2 = 140, \bar{x}^2 = 16,$$

$$\text{所以 } \lg d = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i z_i - 7 \bar{x} \bar{z}}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7 \bar{x}^2} = \frac{50.96 - 7 \times 4 \times 1.63}{140 - 7 \times 16} = 0.19,$$

把样本数据中心点  $(4, 1.63)$  代入  $z = \lg c + \lg d \cdot x$ , 得  $\lg c = 0.87$ ,

所以  $\hat{z} = 0.87 + 0.19x$ .

则  $\lg y = 0.87 + 0.19x$ , 所以  $y$  关于  $x$  的回归方程为  $\hat{y} = 10^{0.87+0.19x}$ .

把  $x=10$  代入上式得:  $\hat{y} = 10^{0.87+0.19x} = 10^{2.77} = 100 \times 10^{0.77} = 589$ ,

故活动推出第 10 天进店消费的人次为 589.

$\dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

(3) 从残差图易知, 7 天中有 5 天为“消费正常日”,  $X$  的可能取值为 1, 2, 3.

$$P(X=1)=\frac{C_5^1 \cdot C_2^2}{C_7^3}=\frac{1}{7},$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2 \cdot C_2^1}{C_7^3}=\frac{4}{7},$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7},$$

所以  $X$  的分布列为:

$X$	1	2	3
$P$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

故  $X$  的期望为  $E(X)=1 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{4}{7} + 3 \times \frac{2}{7} = \frac{15}{7}$ .

..... (12 分)

20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 设动圆  $M$  的半径为  $r$ , 由题意知:  $|MF_1| + |MF_2| = (r+1) + (5-r) = 6 > 2$ ,

根据椭圆定义, 圆心  $M$  的轨迹是以原点为中心,  $F_1, F_2$  为焦点, 长半轴长  $a=3$ , 半焦距  $c=1$  的椭圆,

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 8,$$

$$\therefore E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1. \quad \text{..... (5 分)}$$

(2) 直线  $l$  的方向向量为  $\vec{a} = (-1, 2) = -(1, -2)$ ,

$\therefore$  直线  $l$  的斜率为  $-2$ .

设直线  $l$  的方程为  $y = -2x + m$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} y = -2x + m, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1, \end{cases} \text{ 得 } 44x^2 - 36mx + 9m^2 - 72 = 0.$$

$\therefore$  直线  $l$  与椭圆  $E$  有两个交点,

$$\therefore \Delta = (-36m)^2 - 4 \times 44 \times (9m^2 - 72) > 0, \therefore -2\sqrt{11} < m < 2\sqrt{11}.$$

..... (7 分)

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 + x_2 = \frac{36m}{44}, x_1 \cdot x_2 = \frac{9m^2 - 72}{44},$$

..... (8 分)

$$\because \angle AOB \text{ 为锐角}, \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0,$$

$$\therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 > 0, \quad \text{..... (9 分)}$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 + (-2x_1 + m)(-2x_2 + m) > 0,$$

$$\therefore 5x_1 \cdot x_2 - 2m(x_1 + x_2) + m^2 > 0,$$

$$\therefore \frac{5(9m^2 - 72)}{44} - \frac{2m \times 36m}{44} + m^2 > 0,$$

$$\text{即 } 17m^2 - 360 > 0,$$

$$\therefore m > \frac{6\sqrt{170}}{17} \text{ 或 } m < -\frac{6\sqrt{170}}{17}, \quad \text{..... (11 分)}$$

$$\text{综上, 直线 } l \text{ 的纵截距 } m \text{ 的取值范围为 } m \in \left(-2\sqrt{11}, -\frac{6\sqrt{170}}{17}\right) \cup \left(\frac{6\sqrt{170}}{17}, 2\sqrt{11}\right).$$

..... (12 分)

21. (本小题满分 12 分)

$$(1) \text{ 解: 当 } a=0 \text{ 时, 函数 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + b \ln x + 2 (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = x + \frac{b}{x}.$$

$$\text{① 当 } b \geq 0 \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x) \text{ 在区间 } [1, 2] \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f(1) = \frac{5}{2} = g(b).$$

$$\text{② 当 } b < 0 \text{ 时, 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x_1 = -\sqrt{-b}, x_2 = \sqrt{-b}.$$

$$(i) \text{ 当 } \sqrt{-b} \leq 1, \text{ 即 } b \in [-1, 0) \text{ 时, } f(x) \text{ 在区间 } [1, 2] \text{ 上单调递增, 由上知, 此时 } g(b) = \frac{5}{2}.$$

$$(ii) \text{ 当 } 1 < \sqrt{-b} < 2 \text{ 时, 即 } b \in (-4, -1) \text{ 时, } f(x) \text{ 在区间 } [1, \sqrt{-b}] \text{ 上单调递减, 在区间 } (\sqrt{-b}, 2) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f(\sqrt{-b}) = -\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \ln(-b) + 2.$$

$$(iii) \text{ 当 } \sqrt{-b} \geq 2 \text{ 时, 即 } b \in (-\infty, -4] \text{ 时, } f(x) \text{ 在区间 } [1, 2] \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{此时, } f(x)_{\min} = f(2) = b \ln 2 + 4.$$



$$\text{综上, } g(b) = \begin{cases} \frac{5}{2}, & b \geq -1, \\ -\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \ln(-b) + 2, & -4 < b < -1, \\ b \ln 2 + 4, & b \leq -4, \end{cases}$$

已知  $g(b)$  为非减函数, 所以  $\max\{g(b)\} = \frac{5}{2}$ . ..... (6 分)

(2) 证明: 原式转化为求证  $\frac{f(x_2)}{x_1} > \frac{5}{2}$ .

$$\text{当 } b=1 \text{ 时, } f'(x) = x + a + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + ax + 1}{x},$$

所以  $x_1, x_2$  是方程  $x^2 + ax + 1 = 0$  的两根,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 \cdot x_2 = 1.$$

$$\text{因为 } x_1 < x_2 \text{ 且 } x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad \therefore x_2 > 1, \quad a = -x_2 - \frac{1}{x_2},$$

$$\text{所以 } \frac{f(x_2)}{x_1} = \frac{\frac{1}{2}(x_2 + a)^2 + \ln x_2 + 2}{\frac{1}{x_2}} = \frac{1}{2x_2} + x_2 \ln x_2 + 2x_2.$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{1}{2x} + x \ln x + 2x (x > 1), \text{ 则 } g'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \ln x + 3 > 0,$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 在区间 } (1, +\infty) \text{ 上单调递增, 所以 } g(x) > g(1) = \frac{5}{2}, \text{ 即 } \frac{f(x_2)}{x_1} > \frac{5}{2}.$$

$$\therefore 5x_1 - 2f(x_2) < 0. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

$$\text{解: (1) 由 } \begin{cases} x = \frac{2t-3}{t-1}, \\ y = \frac{2}{t-1}, \end{cases} \text{ 所以 } x = \frac{2t-3}{t-1} = \frac{2(t-1)-1}{t-1} = 2 - \frac{1}{t-1}, \text{ 得 } x \neq 2,$$

$$\text{消去参数 } t \text{ 得 } C_1 \text{ 的普通方程为 } 2x + y - 4 = 0 (x \neq 2).$$

..... (3 分)

$$\text{由 } \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha, \end{cases} \text{ 得 } \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,$$



整理得曲线  $C_2$  的普通方程为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ,

将  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  代入得其极坐标方程为  $\rho^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \theta}$ .

..... (5 分)

(2) 设曲线  $C_2$  上任意一点的坐标为  $(\sqrt{2} \cos \alpha, \sin \alpha)$ , ..... (6 分)

则曲线  $C_2$  上的点到曲线  $C_1$  的距离  $d = \frac{|2\sqrt{2} \cos \alpha + \sin \alpha - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|3 \sin(\alpha + \varphi) - 4|}{\sqrt{5}}$ ,

其中  $\tan \varphi = 2\sqrt{2}$ , ..... (9 分)

当  $\sin(\alpha + \varphi) = 1$  时, 经验证, 该最值取得到,  $d_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

..... (10 分)

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

解: (1)  $f(x) = \begin{cases} -2x + 4, & x \leq -1, \\ -4x + 2, & -1 < x < 1, \\ 2x - 4, & x \geq 1, \end{cases}$  易知当  $x \in (-\infty, 1)$  时,  $f(x)$  单调递减,

当  $x \in [1, +\infty)$  时,  $f(x)$  单调递增,

所以  $f(x) \geq f(1) = -2$ , 即  $f(x)$  有最小值  $-2$ , 无最大值.

..... (5 分)

(2)  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 不等式  $f(x) > m + |2x + 2|$  恒成立, 即  $|3x - 3| - |x + 1| > m + |2x + 2|$ ,

整理得,  $3|x - 1| - 3|x + 1| > m$ .

设  $y = 3|x - 1| - 3|x + 1|$ , 由图象可知, 函数  $y = 3|x - 1| - 3|x + 1|$  的最小值是  $-6$ ,

所以  $m < -6$ , 即实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -6)$ .

..... (10 分)