

# 文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	B	C	D	C	D	D	A	A	B	D

【解析】

1.  $A = \{x | 1 < x < 3\}$ ,  $B = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$ ,  $\therefore A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$ , 故选 A.
2. 因为点  $Z(3, -4)$  关于原点的对称点为  $Z'(-3, 4)$ , 所以向量  $\overrightarrow{OZ'} = (-3, 4)$ , 复数  $z = -3 + 4i$ , 则  $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ , 故选 A.
3. 对于 C,  $11011_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 27$ ; 对于 A,  $221_{(3)} = 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 25$ ; 对于 B,  $130_{(4)} = 1 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 0 \times 4^0 = 28$ ,  $\therefore$  四个数中最大的是 28, 即  $130_{(4)}$ , 故选 B.
4. 由题意得,  $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \sqrt{k+1}-1 = 44$ , 解得  $k = 2024$ , 即当  $k = 2024$  时, 满足判断框内的条件,  $k = 2025$  时, 不满足判断框内的条件, 结束运行, 所以判断框内应填入的条件是 “ $k < 2025$ ?”, 故选 C.
5. 设圆的半径为 1, 当圆内接正三百六十边形时, 每边端点与圆心连线构成的小三角形均为腰为 1、顶角为  $1^\circ$  的等腰三角形, 则圆内接正多边形的面积为  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 1^\circ \times 360 = 180 \sin 1^\circ$ , 圆的面积为  $\pi$ , 用圆内接正多边形的面积来近似代替圆的面积, 既有  $180 \sin 1^\circ = \pi$ , 故选 D.
6. 设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则有  $\begin{cases} x_1^2 = 8y_1 \\ x_2^2 = 8y_2 \end{cases}$ , 两式相减得  $x_1^2 - x_2^2 = 8(y_1 - y_2)$ ,  $\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ,  $\therefore k_{AB} = \frac{1}{4}$ ,  $\therefore$  直线  $l$  的方程为  $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 1)$ , 即  $x - 4y + 7 = 0$ , 故选 C.

7. 因为  $f(-x) = \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} \cdot \cos(-x) = \frac{e^x+1}{1-e^x} \cdot \cos x = -\frac{e^x+1}{e^x-1} \cdot \cos x = -f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  为奇函数, 故排除 B, C; 又当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时,  $f(x) > 0$ , 故排除 A, 故选 D.

8. 由题意知,  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Rightarrow |\vec{a}|^2 - |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ , 代入  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$  的值得  $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1 + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = \sqrt{1 + 2 + 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{5}, \text{ 所以向量 } \vec{a} \text{ 在向量 } \vec{c} \text{ 上的投}$$

$$\text{影为 } \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 故选 D.}$$

9. 如图 1, 该几何体可看成由长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  和四棱锥  $S - ABCD$  组合而成, 该几何体的表面积为四棱锥的侧面积、长方体的侧面积和一个底面面积之和, 其中  $BB_1 = BC = 2$ ,  $AB = 4$ ,  $SA = SB = 2\sqrt{2}$ , 平

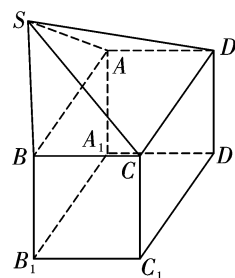


图 1

面  $SAB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BC \perp CD$ , 则可得  $BC \perp SB$ ,  $AD \perp SA$ , 故  $SC = SD = 2\sqrt{3}$ , 则

$$S_{\triangle SBC} = S_{\triangle SAD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}. \text{ 又等腰 } \triangle SCD \text{ 底边上的高为 } \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}, \text{ 故}$$

$$S_{\triangle SCD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}, \quad S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4, \text{ 则该几何体的表面积}$$

$$S = 2 \times 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4 + 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 4 \times 2 + 2 \times 4 = 36 + 8\sqrt{2}, \text{ 故选 A.}$$

10.  $f(x) = \sqrt{2} \cos \varphi \cdot \sin 2\omega x + \sqrt{2} \sin \varphi \cdot \cos 2\omega x = \sqrt{2} \sin(2\omega x + \varphi)$ . 因为  $T = \pi$ ,  $\therefore 2\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$

$$\omega = 1, \text{ 因为对称轴为 } x = \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } 2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}). \text{ 因为 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } k = 1$$

$$\text{时满足题意, 此时 } \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \quad g(x) = \sqrt{2} \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\right] =$$

$$\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right), \quad x \in \left[-\frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 时, } \left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}\right], \text{ 所以 } g(x) \in [-\sqrt{2}, 1], \text{ 故}$$

选 A.

11. 由题意可得:  $|PF_1|^2 = |F_1F_2|^2 + |PF_2|^2 - 2|F_1F_2| \cdot |PF_2| \cdot \cos \angle PF_2F_1 = 4c^2 + 4c^2 - 2 \cdot 2c \cdot 2c \cdot$

$$\cos \angle PF_2F_1 = 8c^2(1 - \cos \angle PF_2F_1), \text{ 即 } |PF_1| = 2\sqrt{2}c \cdot \sqrt{1 - \cos \angle PF_2F_1}, \therefore 2a = ||PF_1| - |PF_2|| =$$

$$|2\sqrt{2}c \cdot \sqrt{1 - \cos \angle PF_2 F_1} - 2c|, \because 60^\circ < \angle PF_2 F_1 < 120^\circ, \therefore -\frac{1}{2} < \cos \angle PF_2 F_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < 1 - \cos \angle PF_2 F_1 < \frac{3}{2}, \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{1 - \cos \angle PF_2 F_1} < \frac{\sqrt{6}}{2}, \therefore 0 < 2\sqrt{2}c \cdot \sqrt{1 - \cos \angle PF_2 F_1} - 2c < (2\sqrt{3} - 2)c, \therefore 0 < 2a < (2\sqrt{3} - 2)c, \therefore \frac{c}{a} > \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, \therefore e \in \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, +\infty \right), \text{ 故选 B.}$$

12. 设  $f(x) = t$ , 则  $f^2(x) - 2af(x) + a^2 - 1 = 0$ , 化为  $t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0$ , 作出  $f(x)$  的图象, 由图 2 知, 关于  $t$  的方程  $t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0$  有两个不等实根  $1 \leq t_1 < t_2 < 5$ . 设  $g(t) = t^2 - 2at + a^2 - 1$ , 则由图 3 知,

$$\begin{cases} g(1) \geq 0, \\ g(5) > 0, \\ 1 < a < 5, \\ \Delta = (-2a)^2 - 4(a^2 - 1) > 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} 1 - 2a + a^2 - 1 \geq 0, \\ 25 - 10a + a^2 - 1 > 0, \\ 1 < a < 5, \\ 4 > 0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a \geq 2 \text{ 或 } a \leq 0, \\ a > 6 \text{ 或 } a < 4, \\ 1 < a < 5, \\ 4 > 0, \end{cases} \therefore 2 \leq a < 4, \text{ 故选 D.}$$

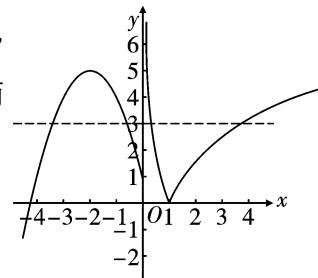


图 2

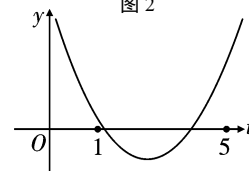


图 3

## 二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$4x + y + 1 = 0$	$\frac{1}{5}$	①②④	$[2e - 1, +\infty)$

### 【解析】

13. 设  $x < 0$ , 则  $-x > 0$ , 因为  $f(x) = f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x (x < 0)$ ,  $f'(x) = 2x - 2$ , 所以  $k = f'(-1) = 2 \times (-1) - 2 = -4$ . 又  $f(-1) = (-1)^2 - 2 \times (-1) = 3$ , 所以切线方程为  $y - 3 = -4(x + 1)$ , 即  $4x + y + 1 = 0$ .

14. 作出可行域如图 4 中的阴影部分所示,  $z = x^2 + y^2$  的几何含义为原点到阴影区域内的点距离的最小值的平方, 易知原点到直线  $2x - y + 1 = 0$  的距离  $d = \frac{|2 \times 0 - 1 \times 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 即原点到阴影区域的最小值, 而  $d^2 = \frac{1}{5}$ , 则  $z = x^2 + y^2$  的最小值为  $\frac{1}{5}$ .

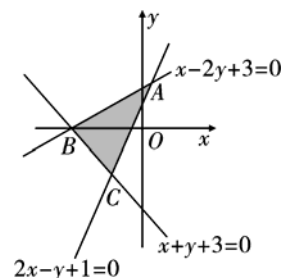


图 4

15. ①:  $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$  或  $x = 2$ , 故 “ $x = 1$ ” 是 “ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”

的充分不必要条件, ①正确; ②: 易知  $x^2 + y^2 \leq 1$  表示圆  $x^2 + y^2 = 1$  上

及其内部的点, 而  $|x| + |y| \leq 1$  表示如图 5 的阴影部分区域, 则概率

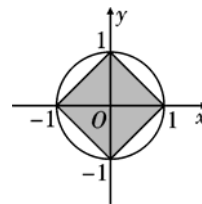


图 5

$P = \frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\text{圆}}} = \frac{2}{\pi}$ , ②正确; ③: 令  $2^x = t (t > 0)$ , 故③中方程等价于  $t^2 + t + 1 - m = 0$ , 而命题

$P$  是假命题, 则  $t^2 + t + 1 - m = 0 (t > 0)$  无解, 由于对称轴  $t = -\frac{1}{2} < 0$ , 只需  $1 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 1$

即可, ③不正确; ④: 因为  $g(x) = \cos x$  为偶函数, 所以  $g(x) = \cos x = \cos |x|$ , 所以

$f(x) = \cos x + |\cos x|$ , 且  $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + |\cos(x + 2\pi)| = f(x)$ , 所以  $f(x)$  的最小正周

期为  $T = 2\pi$ . 另解: 我们还可以作出  $f(x)$  的图象, 如图 6, 易得最小正周期  $T = 2\pi$ . 所以④

正确, 故答案为①②④.

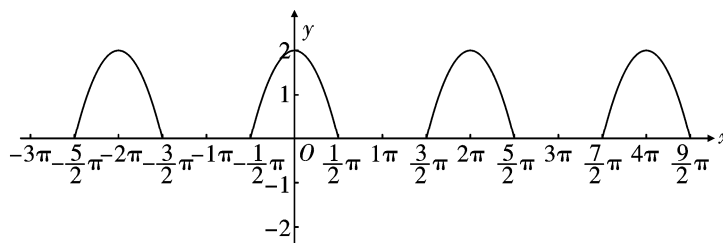


图 6

16. 设函数  $y = h(x)$  的图象与  $y = g(x)$  的图象关于原点对称, 由  $g(x) = -x^3 + \frac{1}{2}ax (x < 0)$ , 得

$h(x) = -x^3 + \frac{1}{2}ax (x > 0)$ . 由题意, 函数  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的图象上存在关于原点的对称

点, 即  $y = f(x)$  与  $y = h(x)$  的图象有交点, 即  $e^x - \frac{1}{2}x^3 - x^2 = -x^3 + \frac{1}{2}ax$  有解, 即

$\frac{1}{2}a = \frac{e^x}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x$  有解. 令  $m(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x$ , 则  $m'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} + x - 1 =$

$(x-1)\left(\frac{e^x}{x^2} + 1\right)$ , 当  $x \in (0, 1)$  时,  $m'(x) < 0$ , 函数  $m(x)$  单调递减, 当  $x \in (1, +\infty)$ ,  $m'(x) > 0$ ,

函数  $m(x)$  单调递增, 所以  $m(x)$  有最小值  $m(1) = e - \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{2}a \geq e - \frac{1}{2}$ , 即  $a \geq 2e - 1$ ,

故  $a$  的取值范围为  $[2e - 1, +\infty)$ .

### 三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

(1) 解：由  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \cdots + \frac{1}{na_n} = \frac{2n}{n+1}$ , ①

当  $n=1$  时,  $a_1=1$ ;

当  $n \geq 2$  时,  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)a_{n-1}} = \frac{2(n-1)}{n}$ , ②

①-②, 得  $\frac{1}{na_n} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2}{n(n+1)}$ ,

$\therefore a_n = \frac{n+1}{2}$ ,

$\therefore a_n = \frac{n+1}{2}$  对  $n=1$  也适合.

综上,  $a_n = \frac{n+1}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$ . ..... (6 分)

(2) 证明:  $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} = 4 \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$ ,

$S_n = 4 \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right] = 4 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) < 2$ .

..... (12 分)

18.（本小题满分 12 分）

(1) 证明：如图 7，设  $AB_1$  的中点为  $G$ ，连接  $DG$ ,  $GF$ ,  $EF$ ,

因为点  $D$ ,  $E$ ,  $F$  分别是线段  $AB$ ,  $AC_1$ ,  $A_1C_1$  的中点，

所以  $DG \parallel BB_1$  且  $DG = \frac{1}{2} BB_1$ ,  $EF \parallel AA_1$ ,

且  $EF = \frac{1}{2} AA_1$ .

因为  $BB_1 \parallel AA_1$ , 所以  $DG \parallel EF$  且  $DG = EF$ ,

所以四边形  $DGFE$  为平行四边形，

所以  $DE \parallel GF$ , 因为  $GF \subset$  平面  $AB_1F$ ,  $DE \not\subset$  平面  $AB_1F$ ,

所以  $DE \parallel$  平面  $AB_1F$ . ..... (6 分)

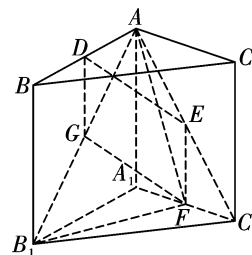


图 7



(2) 解: 因为  $V_{A-DEF} = V_{D-AEF} = \frac{1}{2}V_{D-AC_1F} = \frac{1}{4}V_{D-C_1A_1A} = \frac{1}{8}V_{B-C_1A_1A}$ ,  $BB_1 \parallel$  平面  $C_1A_1A$ ,  
所以  $V_{B-C_1A_1A} = V_{B_1-C_1A_1A} = \frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}$ ,  
所以  $V_{ABC-A_1B_1C_1} = 24V_{A-DEF} = 24 \times \frac{1}{12} = 2$ . ..... (12 分)

19. (本小题满分 12 分)

解: (1) 应该选择模型①. .... (2 分)

(2) 因为  $y = a + bx$ ,  $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 4704$ ,  $\bar{x} = 4$ ,  $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140$ ,  $\bar{y}^2 = 16$ ,

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i y_i - 7\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2} = \frac{4704 - 7 \times 4 \times 135}{140 - 7 \times 16} = 33.$$

把样本数据中心点  $(4, 135)$  代入  $y = a + bx$ , 得  $a = 3$ ,

所以  $y$  关于  $x$  的回归方程为  $\hat{y} = 3 + 33x$ .

把  $x = 8$  代入上式得:  $\hat{y} = 3 + 33 \times 8 = 267$ ,

故该影院开业第 8 天前来观影的人次为 267. .... (7 分)

(3) 从残差图易知, 7 天中有 5 天为“观影正常日”, 记这 5 天为 1, 2, 3, 4, 5,

2 天“非观影正常日”为  $a, b$ ,

所以从 7 天中选出 3 天的种数为①  $(1, 2, a), (1, 2, b), (1, 3, a), (1, 3, b), \dots, (4, 5, a),$

$(4, 5, b)$ , 共  $(4 + 3 + 2 + 1) \times 2 = 20$  种;

②  $(1, 2, 3), (1, 2, 4), \dots, (3, 4, 5)$ , 共 10 种;

③  $(a, b, 1), (a, b, 2), \dots, (a, b, 5)$ , 共 5 种,

故总种数为 35 种, 含“非观影正常日”的种数为 25 种,

所以这 3 天中含“非观影正常日”的概率  $P = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$ . .... (12 分)

20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 设动圆  $M$  的半径为  $r$ , 由题意知:  $|MF_1| + |MF_2| = (r + 1) + (5 - r) = 6 > 2$ ,

根据椭圆定义, 圆心  $M$  的轨迹是以原点为中心,  $F_1, F_2$  为焦点, 长半轴长  $a = 3$ , 半焦

距  $c = 1$  的椭圆,



$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 8,$$

$$\therefore E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1. \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(2) 直线  $l$  的方向向量为  $\vec{a} = (-1, 2) = -(1, -2)$ ,

$\therefore$  直线  $l$  的斜率为  $-2$ .

设直线  $l$  的方程为  $y = -2x + m$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} y = -2x + m, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1, \end{cases} \text{ 得 } 44x^2 - 36mx + 9m^2 - 72 = 0.$$

$\therefore$  直线  $l$  与椭圆  $E$  有两个交点,

$$\therefore \Delta = (-36m)^2 - 4 \times 44 \times (9m^2 - 72) > 0, \therefore -2\sqrt{11} < m < 2\sqrt{11}. \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 + x_2 = \frac{36m}{44}, x_1 \cdot x_2 = \frac{9m^2 - 72}{44}, \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$\therefore \angle AOB$  为锐角,  $\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$ ,

$$\therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 > 0, \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 + (-2x_1 + m)(-2x_2 + m) > 0,$$

$$\therefore 5x_1 \cdot x_2 - 2m(x_1 + x_2) + m^2 > 0,$$

$$\therefore \frac{5(9m^2 - 72)}{44} - \frac{2m \times 36m}{44} + m^2 > 0,$$

$$\text{即 } 17m^2 - 360 > 0,$$

$$\therefore m > \frac{6\sqrt{170}}{17} \text{ 或 } m < -\frac{6\sqrt{170}}{17}, \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

$$\text{综上, 直线 } l \text{ 的纵截距 } m \text{ 的取值范围为 } m \in \left(-2\sqrt{11}, -\frac{6\sqrt{170}}{17}\right) \cup \left(\frac{6\sqrt{170}}{17}, 2\sqrt{11}\right). \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

21. (本小题满分 12 分)

$$(1) \text{ 解: 当 } a=0, b=1 \text{ 时, 函数 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x + 2 (x > 0),$$



则  $f'(x) = x + \frac{1}{x} > 0$ ,  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上单调递增,

所以  $f(x)_{\min} = f(1) = \frac{5}{2}$ . ..... (5 分)

(2) 证明: 当  $b=1$  时,  $f'(x) = x + a + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + ax + 1}{x}$ ,

所以  $x_1, x_2$  是方程  $x^2 + ax + 1 = 0$  的两根,

所以  $x_1 + x_2 = -a$ ,  $x_1 \cdot x_2 = 1$ .

因为  $x_1 < x_2$  且  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,

$$\therefore x_2 > 1, a = -x_2 - \frac{1}{x_2}, \frac{f(x_2)}{x_1} = \frac{\frac{1}{2}(x_2 + a)^2 + \ln x_2 + 2}{\frac{1}{x_2}} = \frac{1}{2x_2} + x_2 \ln x_2 + 2x_2.$$

令  $g(x) = \frac{1}{2x} + x \ln x + 2x (x > 1)$ ,

则  $g'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \ln x + 3 > 0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $g(x) > g(1) = \frac{5}{2}$ ,

即  $\frac{f(x_2)}{x_1} > \frac{5}{2}$ . ..... (12 分)

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

$$\text{解: (1) 由 } \begin{cases} x = \frac{2t-3}{t-1}, \\ y = \frac{2}{t-1}, \end{cases} \text{ 所以 } x = \frac{2t-3}{t-1} = \frac{2(t-1)-1}{t-1} = 2 - \frac{1}{t-1}, \text{ 得 } x \neq 2,$$

消去参数  $t$  得  $C_1$  的普通方程为  $2x + y - 4 = 0 (x \neq 2)$ . ..... (3 分)

$$\text{由 } \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha, \end{cases} \text{ 得 } \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 + y^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,$$

整理得曲线  $C_2$  的普通方程为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ,

将  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  代入得其极坐标方程为  $\rho^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \theta}$ .

..... (5 分)



(2) 设曲线  $C_2$  上任意一点的坐标为  $(\sqrt{2} \cos \alpha, \sin \alpha)$ , ..... (6 分)

$$\text{则曲线 } C_2 \text{ 上的点到曲线 } C_1 \text{ 的距离 } d = \frac{|2\sqrt{2} \cos \alpha + \sin \alpha - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|3 \sin(\alpha + \varphi) - 4|}{\sqrt{5}},$$

其中  $\tan \varphi = 2\sqrt{2}$ , ..... (9 分)

当  $\sin(\alpha + \varphi) = 1$  时, 经验证, 该最值取得到,  $d_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

..... (10 分)

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

$$\text{解: (1) } f(x) = \begin{cases} -2x + 4, & x \leq -1, \\ -4x + 2, & -1 < x < 1, \\ 2x - 4, & x \geq 1, \end{cases} \text{ 易知当 } x \in (-\infty, 1) \text{ 时, } f(x) \text{ 单调递减,}$$

当  $x \in [1, +\infty)$  时,  $f(x)$  单调递增,

所以  $f(x) \geq f(1) = -2$ , 即  $f(x)$  有最小值  $-2$ , 无最大值.

..... (5 分)

(2)  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 不等式  $f(x) > m + |2x + 2|$  恒成立, 即  $|3x - 3| - |x + 1| > m + |2x + 2|$ ,

整理得,  $3|x - 1| - 3|x + 1| > m$ .

设  $y = 3|x - 1| - 3|x + 1|$ , 由图象可知, 函数  $y = 3|x - 1| - 3|x + 1|$  的最小值是  $-6$ ,

所以  $m < -6$ , 即实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -6)$ .

..... (10 分)